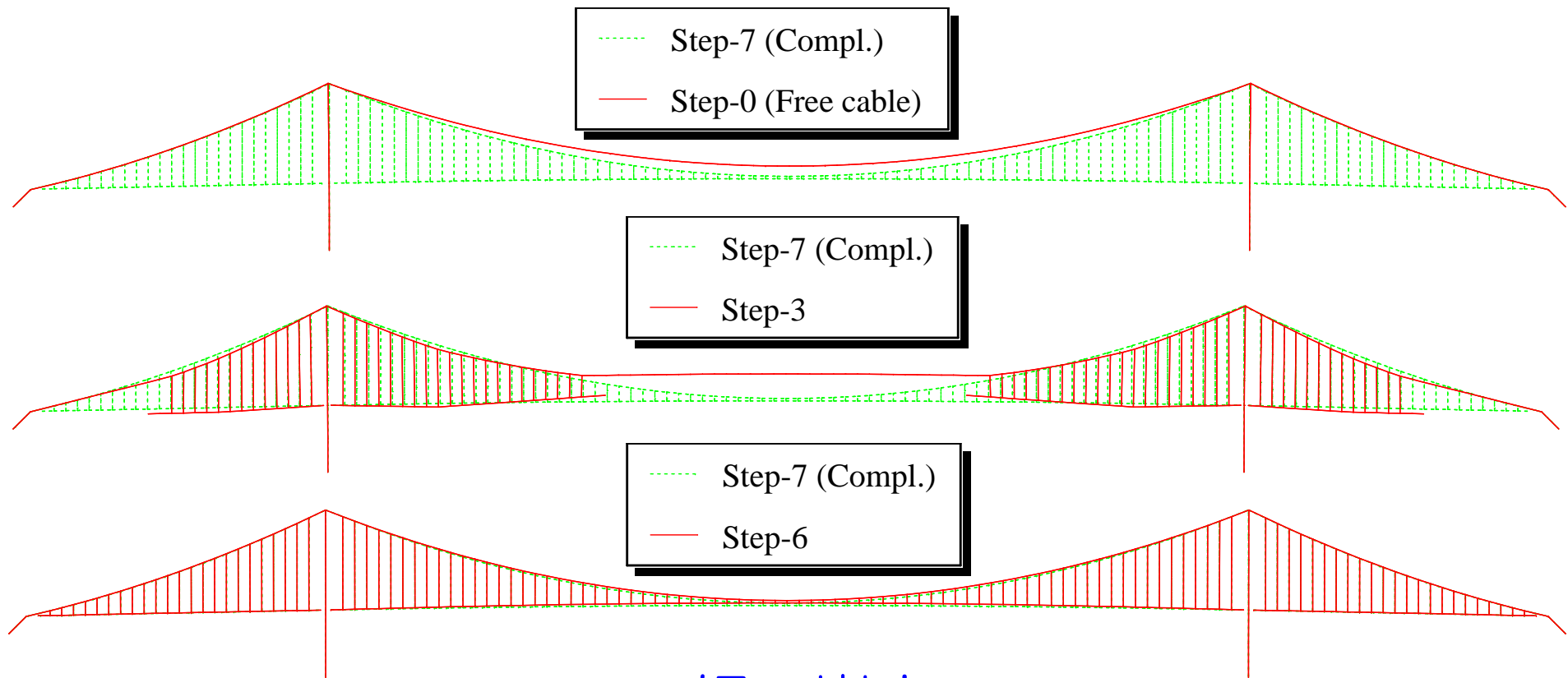


# 10. 有限要素法解析

## (2) 2次元仮想仕事の原理と

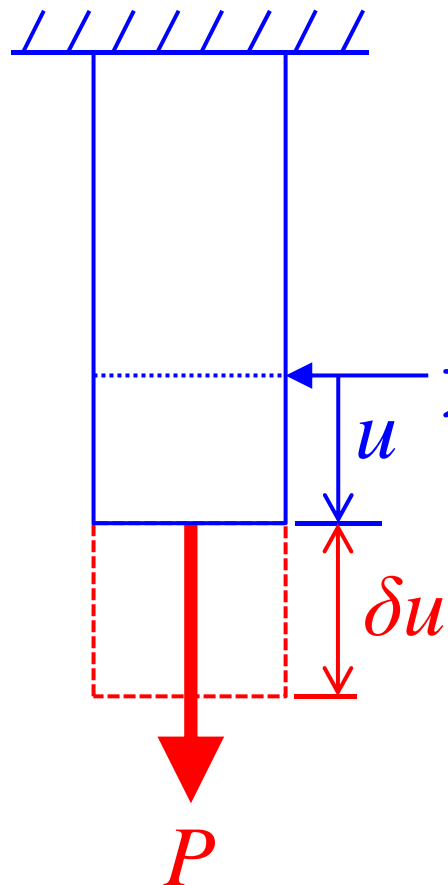
## Eulerはり要素の要素剛性方程式の誘導



三好 崇夫  
加藤 久人

# 1. 仮想仕事の原理の概要

荷重 $P$ が作用してつり合い状態にある棒部材  
(応力 $\sigma$ , ひずみ $\varepsilon$ も発生)



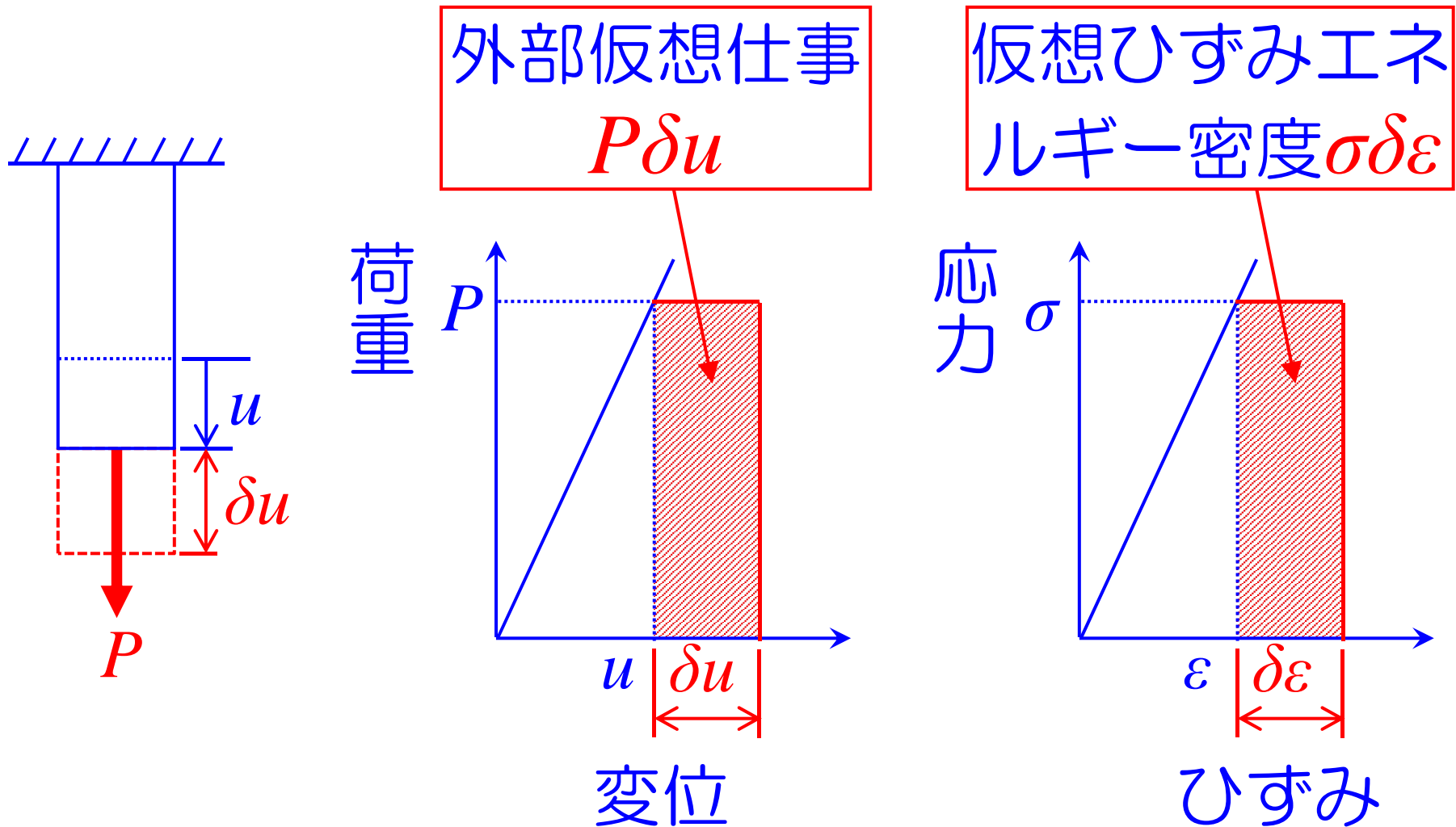
つり合い状態を維持したまま、  
変位を $\delta u$ だけ増加

$\delta u$  : 仮想変位と呼ぶ

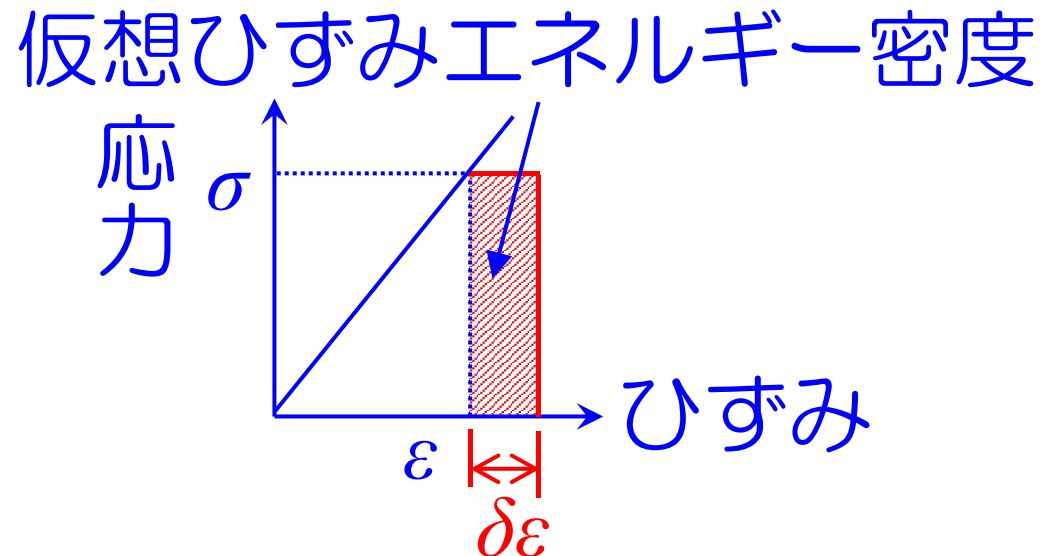
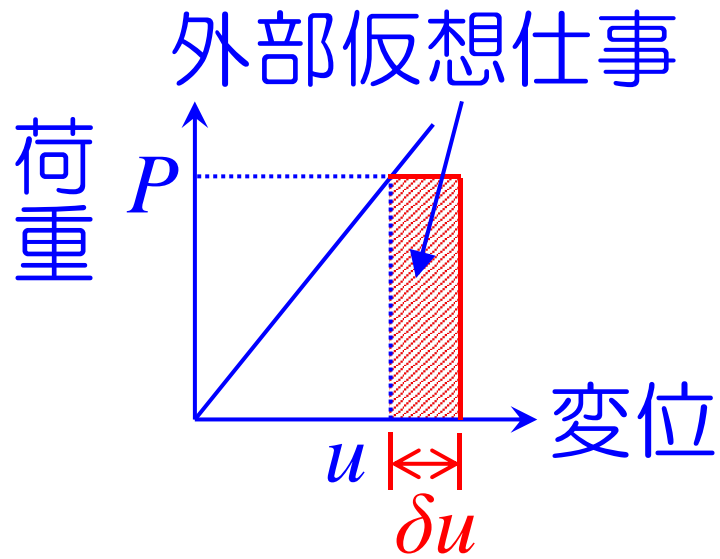
対応する仮想ひずみ $\delta\varepsilon$ も発生

# 1. 仮想仕事の原理の概要

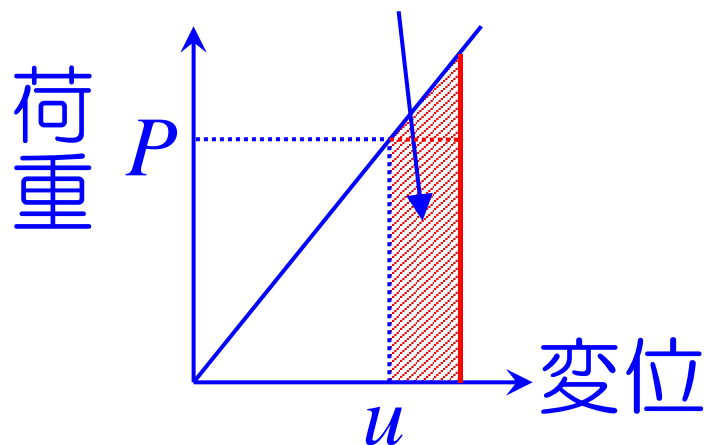
「荷重－変位関係」と「応力－ひずみ関係」



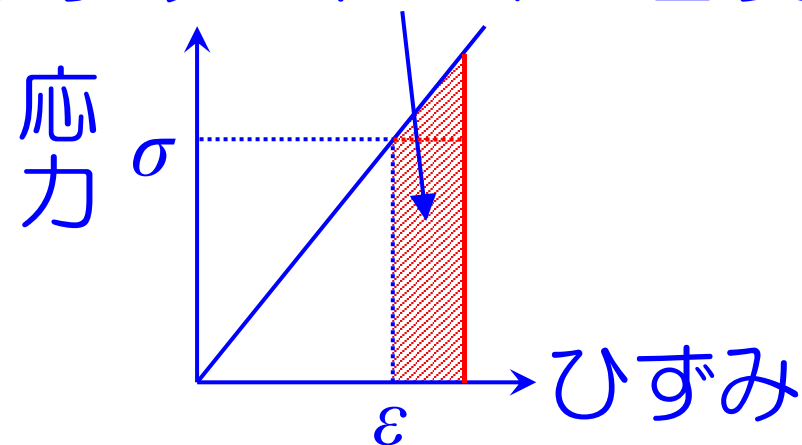
# 1. 仮想仕事の原理の概要



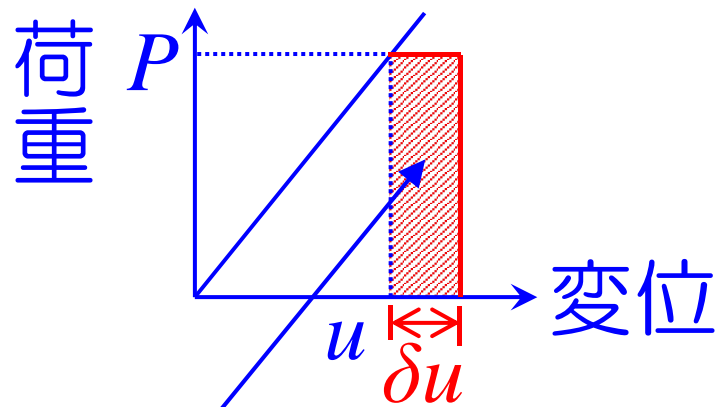
実外力仕事増分



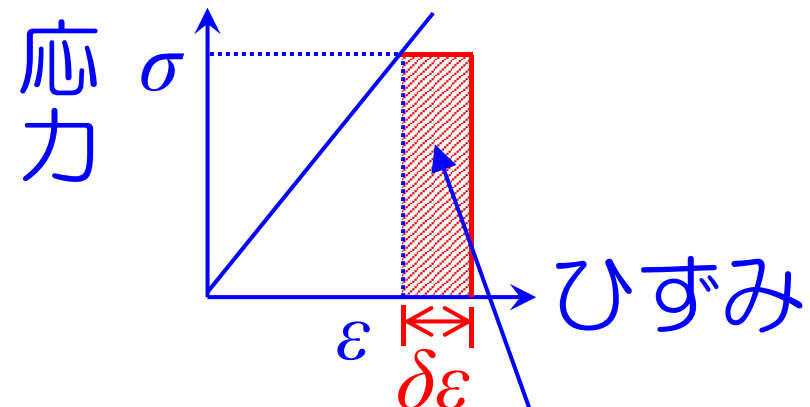
実ひずみエネルギー密度増分



# 1. 仮想仕事の原理の概要



外部仮想仕事



仮想ひずみエネルギー密度

構造全体の体積で積分!!

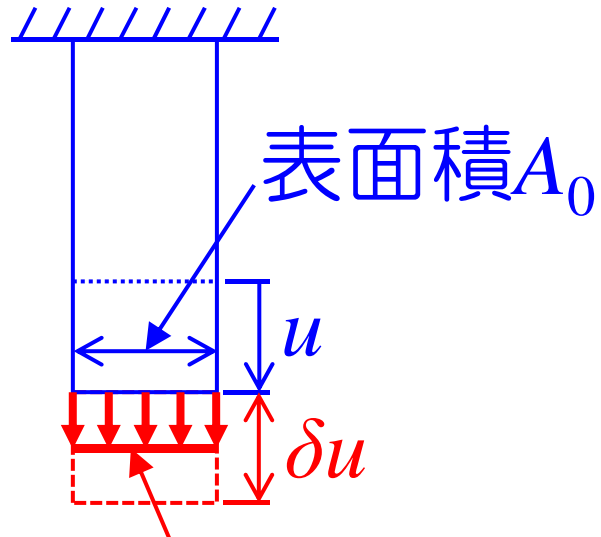
仮想ひずみエネルギー

## 仮想仕事の原理

$$\begin{aligned} (\text{外部仮想仕事}) &= (\text{仮想ひずみエネルギー}) \\ &= (\text{内部仮想仕事}) \end{aligned}$$

# 1. 仮想仕事の原理の概要

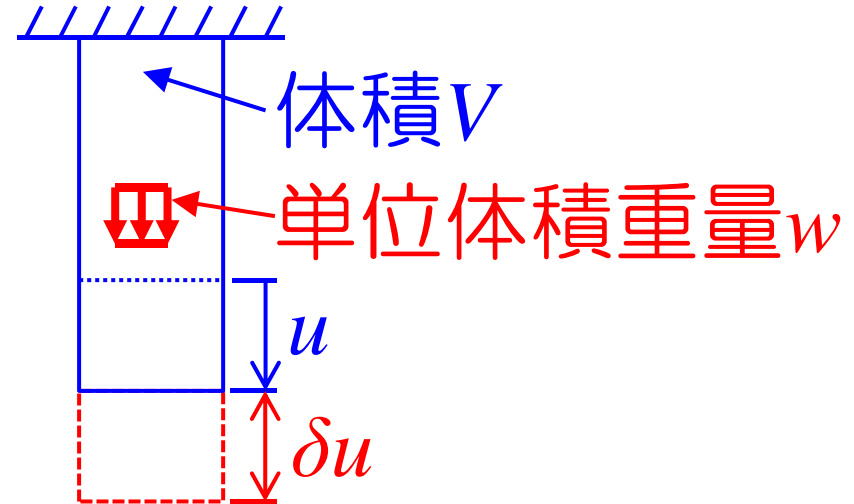
表面力と物体力による外部仮想仕事



表面力  $p$  (分布荷重)

表面力による  
外部仮想仕事

$$= \int_{A_0} p \delta u dA$$

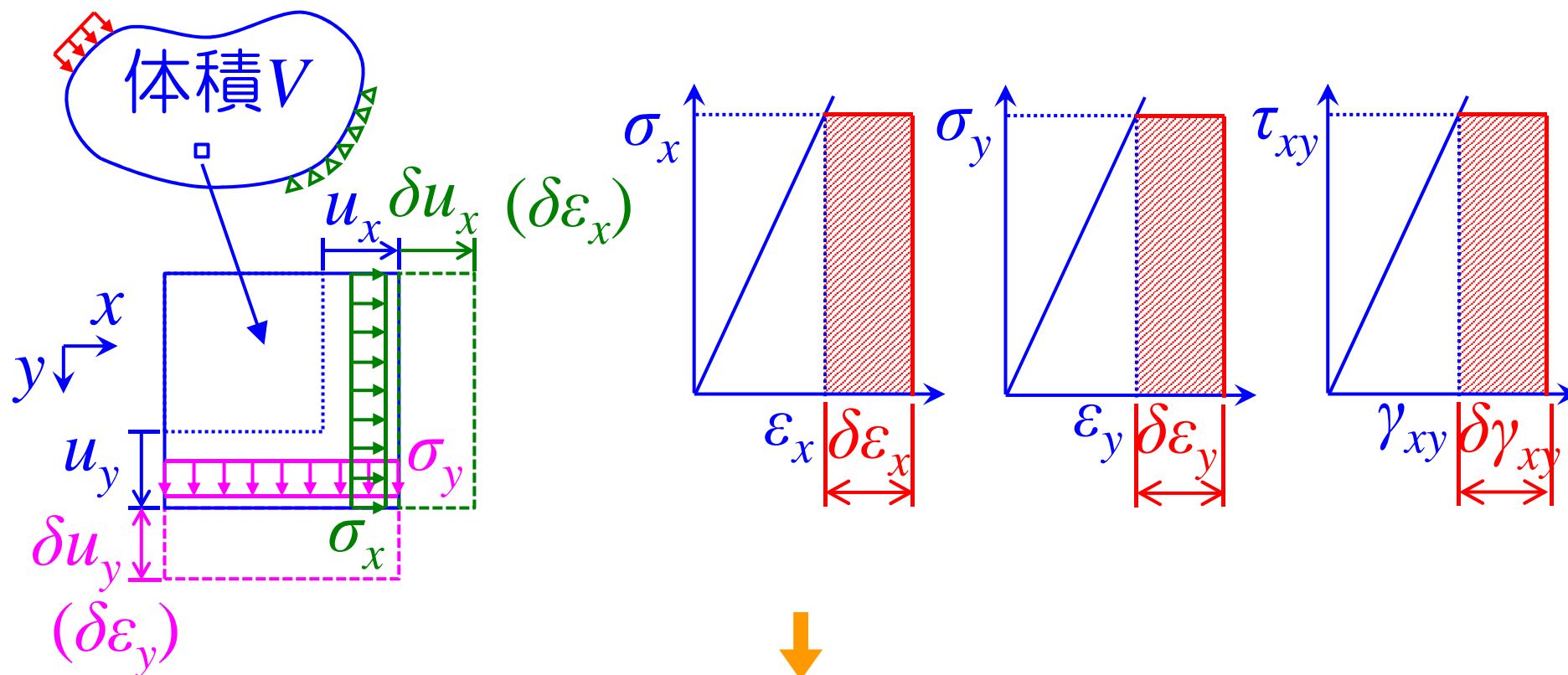


物体力による  
外部仮想仕事

$$= \int_V w \delta u dV$$

## 2. 2次元仮想仕事の原理

2次元物体の内部仮想仕事 $\delta U$

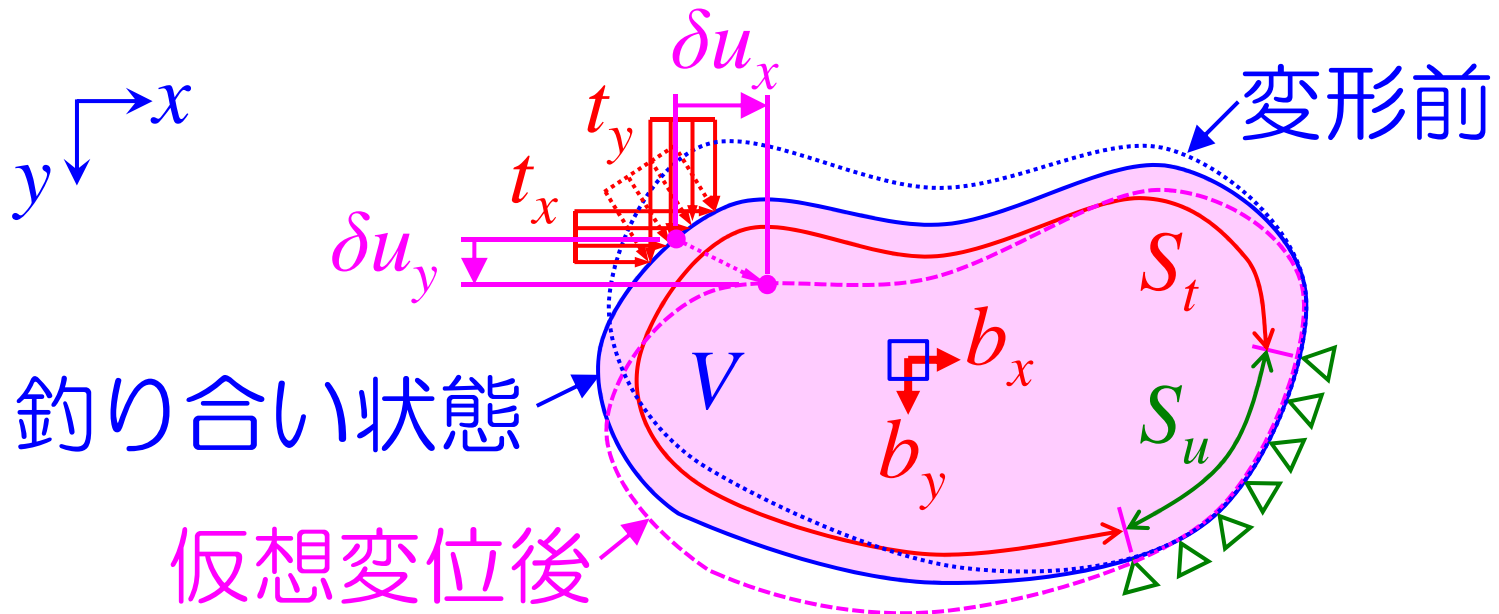


$$\delta U = \int_V (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dV \quad (1)$$

( $x, y$ 方向, 面内せん断分を足し合せて体積分)

## 2. 2次元仮想仕事の原理

2次元物体の外部仮想仕事 $\delta W$



$$\delta W = \underbrace{\int_{S_t} (t_x \delta u_x + t_y \delta u_y) dS}_{\text{表面力項}} + \underbrace{\int_V (b_x \delta u_x + b_y \delta u_y) dV}_{\text{物体力項}} \quad (2)$$

( $x, y$ 方向分を足し合せ, 表面力は境界条件の規定されていない面積, 物体力は体積で積分)



## 2. 2次元仮想仕事の原理

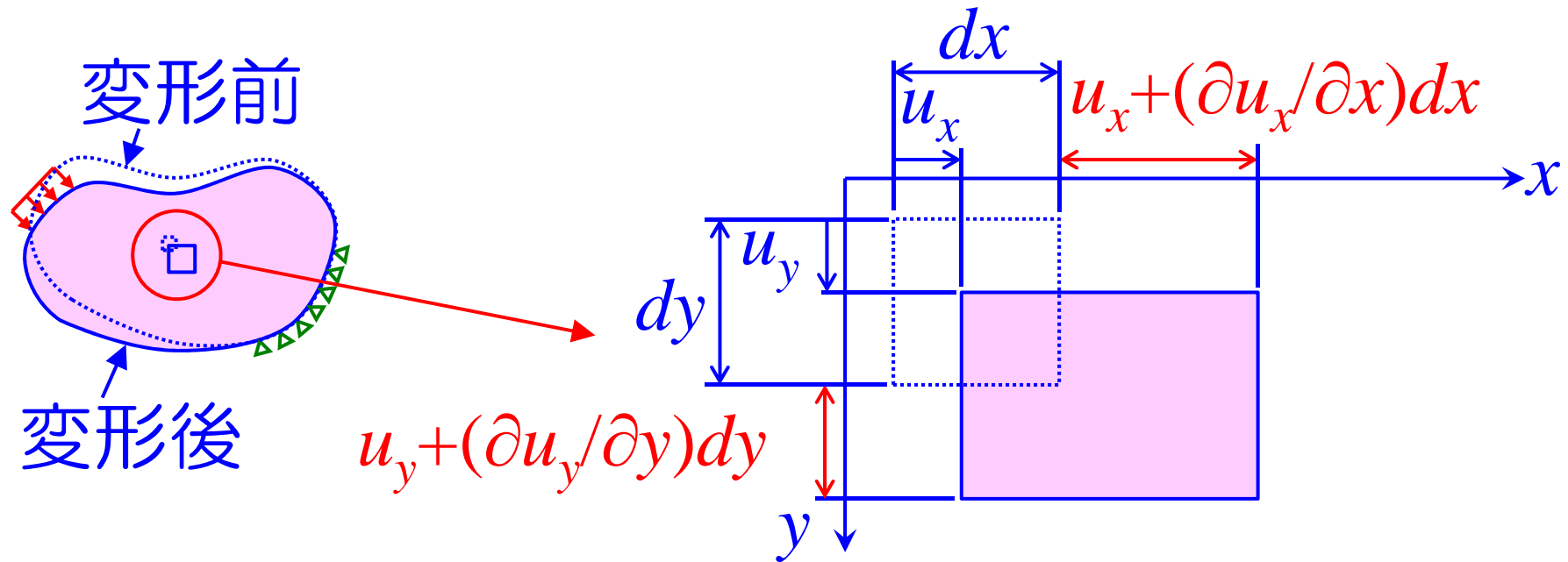
### 2次元物体の仮想仕事式

$$\begin{aligned} \text{(外部仮想仕事)} &= \text{(内部仮想仕事)} \\ \delta W &= \delta U \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{S_t} (t_x \delta u_x + t_y \delta u_y) dS + \int_V (b_x \delta u_x + b_y \delta u_y) dV \\ = \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dV \end{aligned} \quad (3)$$

### 3. 2次元ひずみと変位の関係

#### 直ひずみ



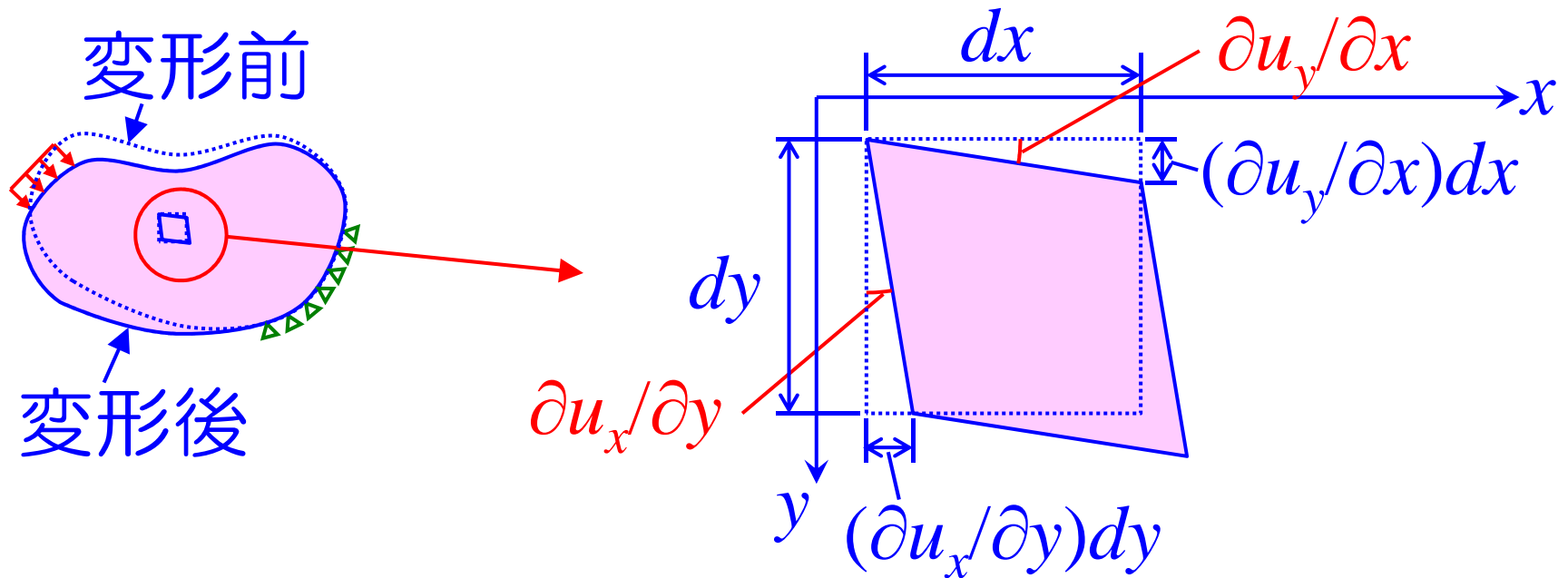
$$x\text{方向} : \varepsilon_x = \left( u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx - u_x \right) / dx = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$y\text{方向} : \varepsilon_y = \left( u_y + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy - u_y \right) / dy = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

(4)<sub>1,2</sub>

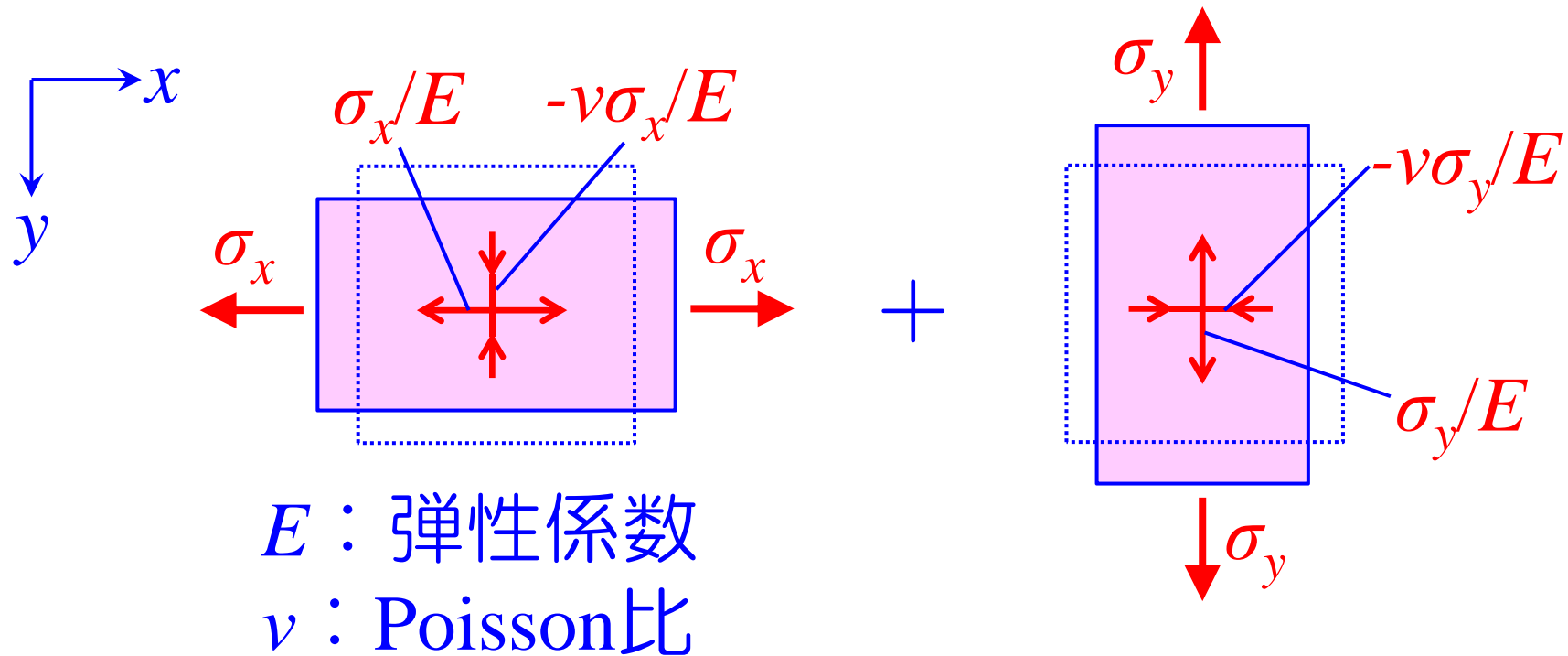
### 3. 2次元ひずみと変位の関係

#### せん断ひずみ



$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (4)_3$$

## 4. 2次元応力とひずみの関係

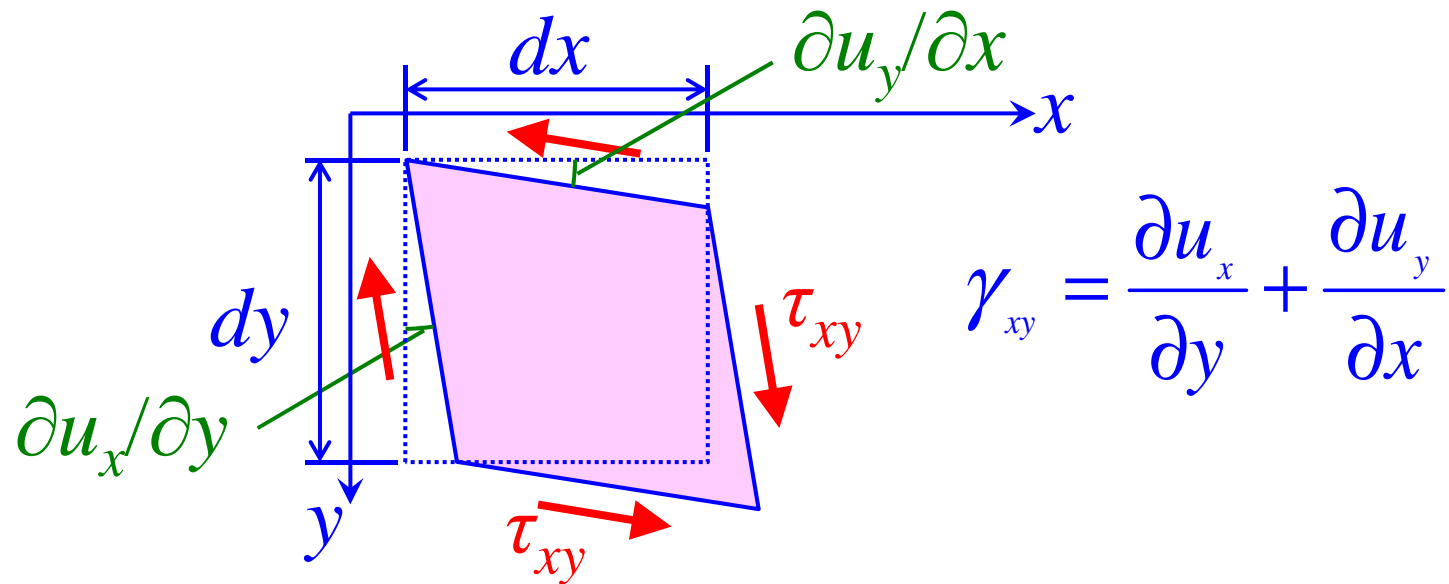


$x$ 方向直ひずみ合計 :  $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}$

$y$ 方向直ひずみ合計 :  $\varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E}$

(5)<sub>1,2</sub>

## 4. 2次元応力とひずみの関係



x方向直応力：
$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$$

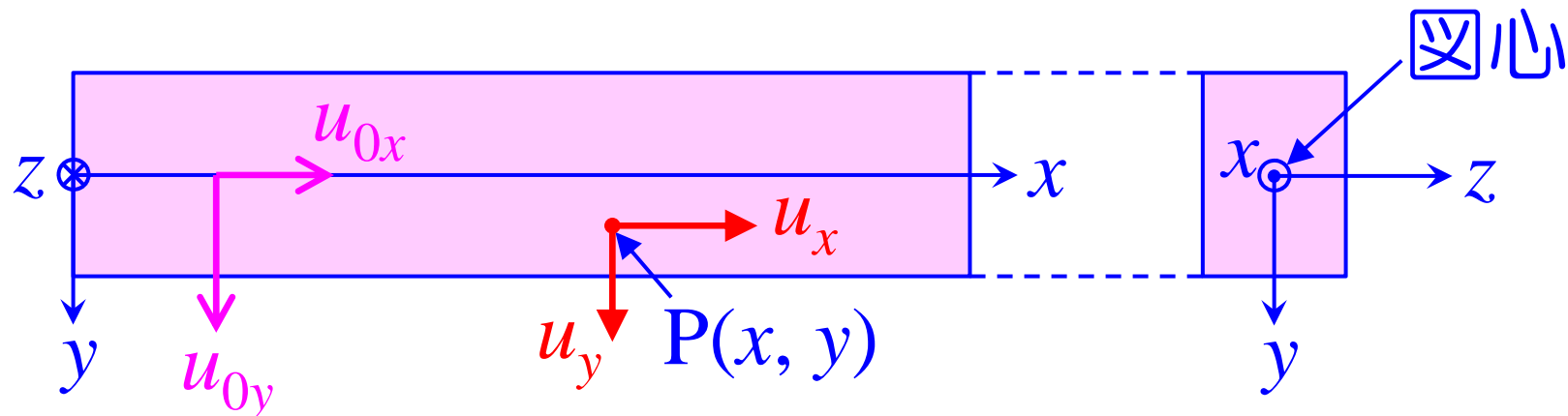
y方向直応力：
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (6)_{1\sim 3}$$

せん断応力：
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}$$

# 5. 2次元Eulerはりの変位

はり

- ✓ 3 or 2次元問題を1次元化したもの
- ✓ はり内部の任意点の変位 $u_x$ ,  $u_y$  :  $x$ のみの関数
- ✓ 1次元化のため, 断面無変形, 断面内無応力の仮定, Eulerの仮定を導入

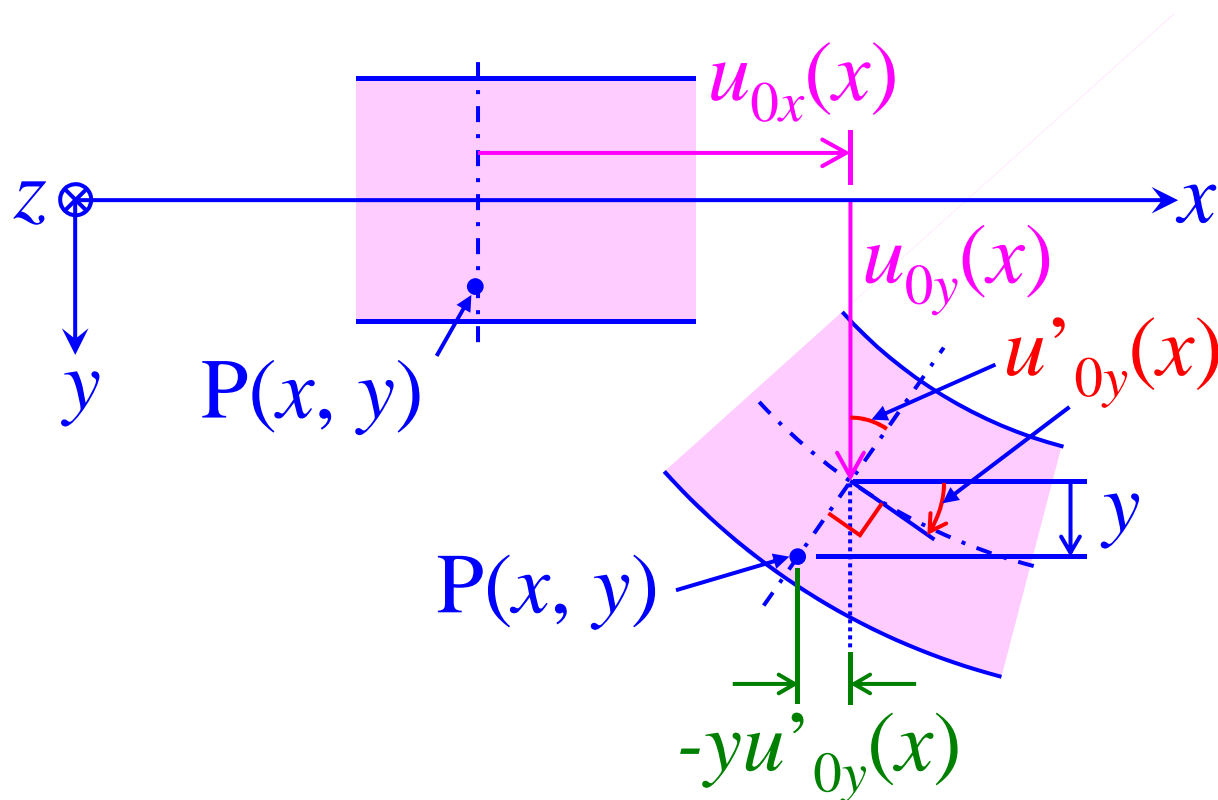


# 5. 2次元Eulerはりの変位

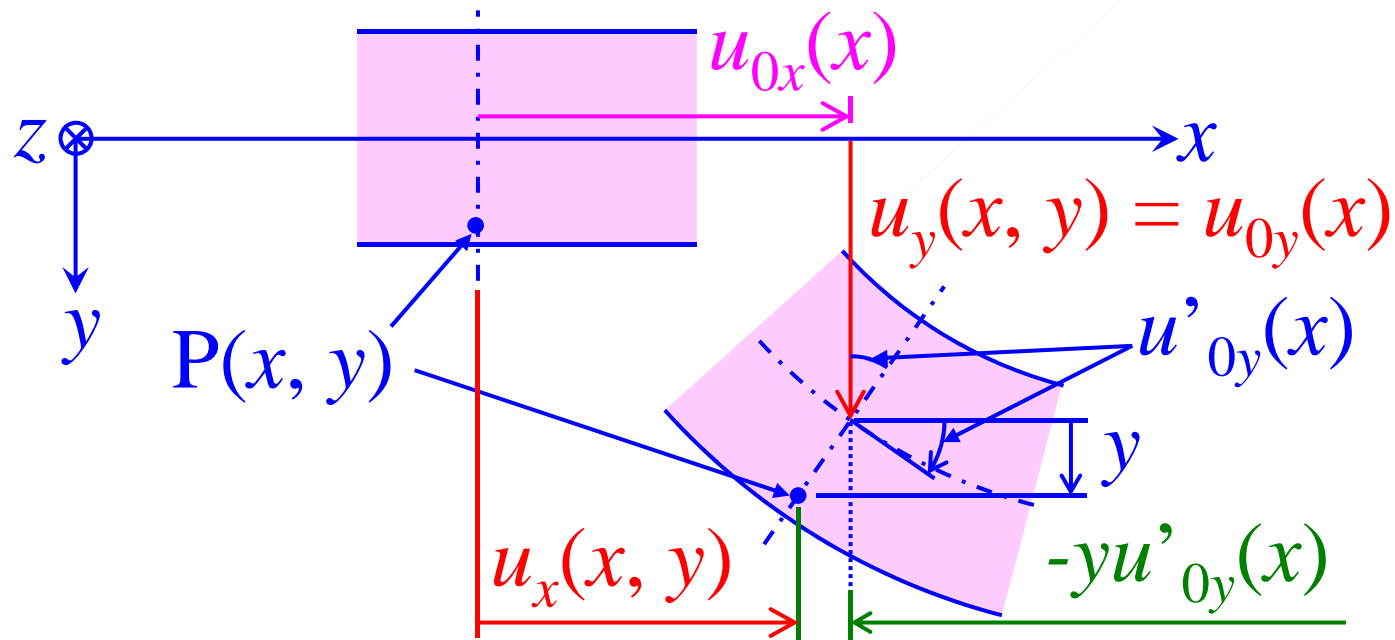
はり内部の変位

Eulerの仮定：

「変形後の断面は変形後の部材軸に直交」  
を前提に定式



## 5. 2次元Eulerはりの変位



$$x\text{方向変位} : u_x(x, y) = u_{0x}(x) - y \frac{du_{0y}(x)}{dx} = u_{0x}(x) - yu'_{0y}(x)$$

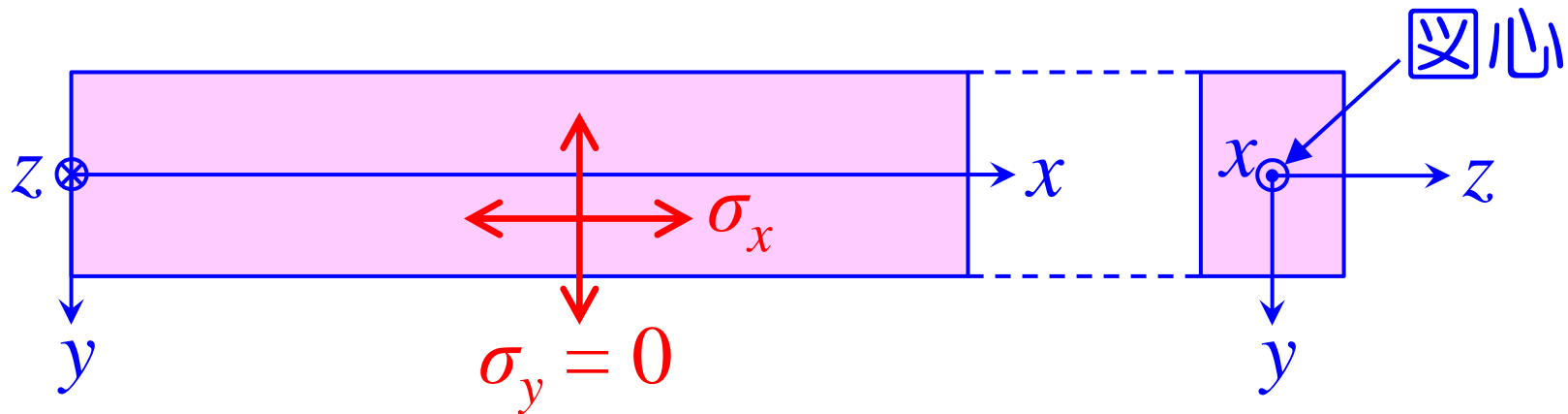
$$y\text{方向変位} : u_y(x, y) = u_{0y}(x) \quad (7)_{1,2}$$

→ 断面無変形の仮定 :  $u_x, u_y \rightarrow u_{0x}, u_{0y}$  のみで表示



## 6. 2次元Eulerはりの応力, ひずみ

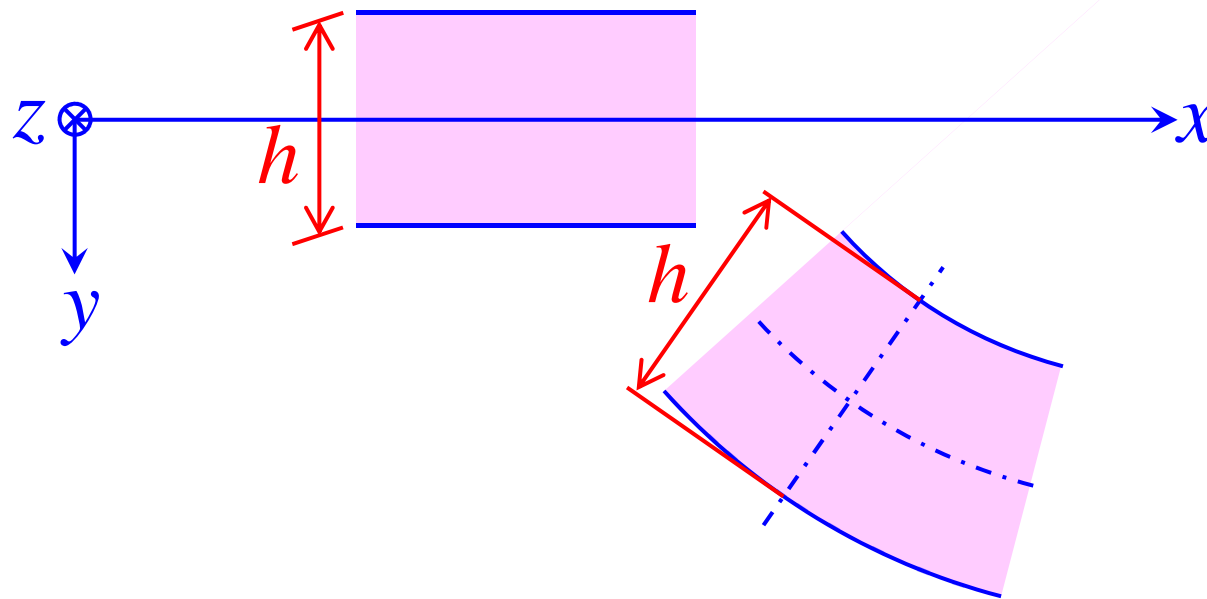
はり内部の応力



断面内無応力の仮定： $\sigma_y = 0$  (8)<sub>1</sub>

$$\text{式(5)}_1 \text{より, } \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\cancel{\sigma_y} 0}{E} = \frac{\sigma_x}{E} \rightarrow \sigma_x = E \varepsilon_x \quad (8)_2$$

## 6. 2次元Eulerはりの応力, ひずみ



はり内部のひずみ

断面無変形の仮定： $\varepsilon_y = 0$  (9)<sub>1</sub>

式(4)<sub>3</sub>に式(7)を代入して,

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = -u'_{0y}(x) + u'_{0y}(x) = 0 \quad (9)_2$$

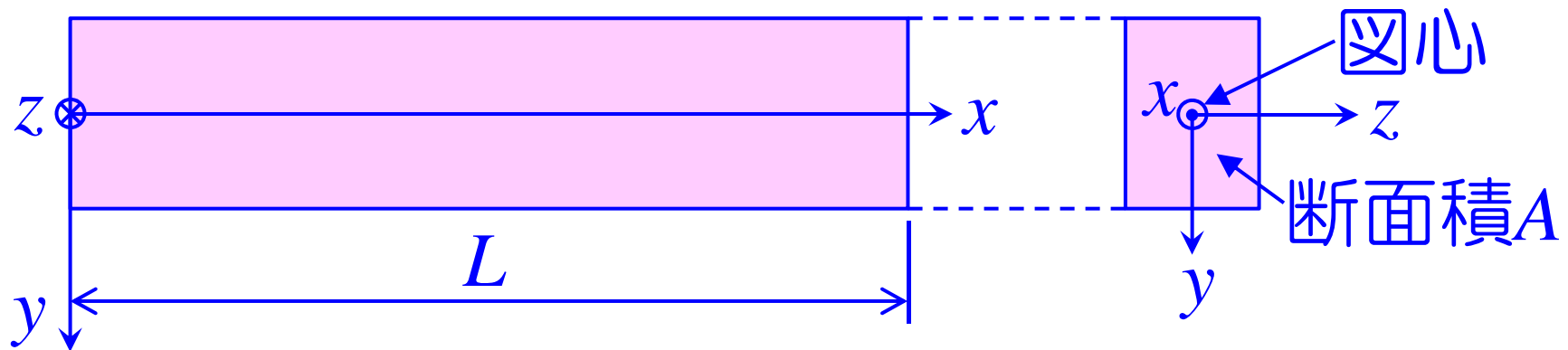
## 7. 2次元Eulerはりの内部仮想仕事

式(1)に式(8), (9)<sub>2</sub>を代入

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \cancel{\sigma_y} \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \cancel{\delta \gamma_{xy}}) dV = \int_V E \varepsilon_x \delta \varepsilon_x dV \\ &= \int_0^L \int_A E \varepsilon_x \delta \varepsilon_x dA dx \quad : \text{はり長さ } L, \text{ 断面積 } A \text{ とする}\end{aligned} \quad (10)$$

式(7)<sub>1</sub>を式(4)<sub>2</sub>に代入

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = u'_{0x} - y u''_{0y} \quad (11)$$



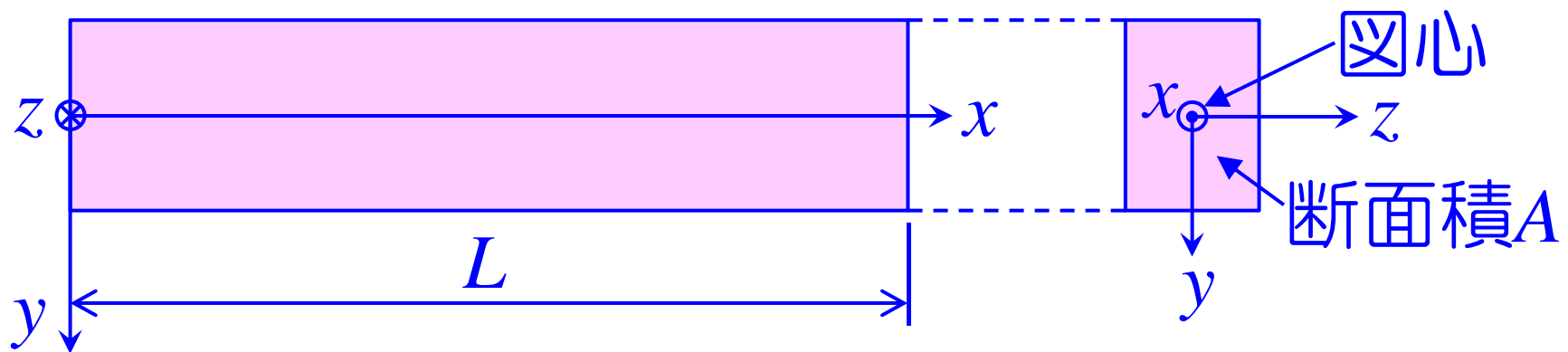
# 7. 2次元Eulerはりの内部仮想仕事

式(11)の変分

$$\delta \varepsilon_x = \delta u'_{0x} - y \delta u''_{0y} \quad (12)$$

式(11), (12)を式(10)へ代入

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^L \int_A E \varepsilon_x \delta \varepsilon_x dA dx \\ &= \int_0^L \int_A E (u'_{0x} - y u''_{0y}) (\delta u'_{0x} - y \delta u''_{0y}) dA dx \end{aligned}$$

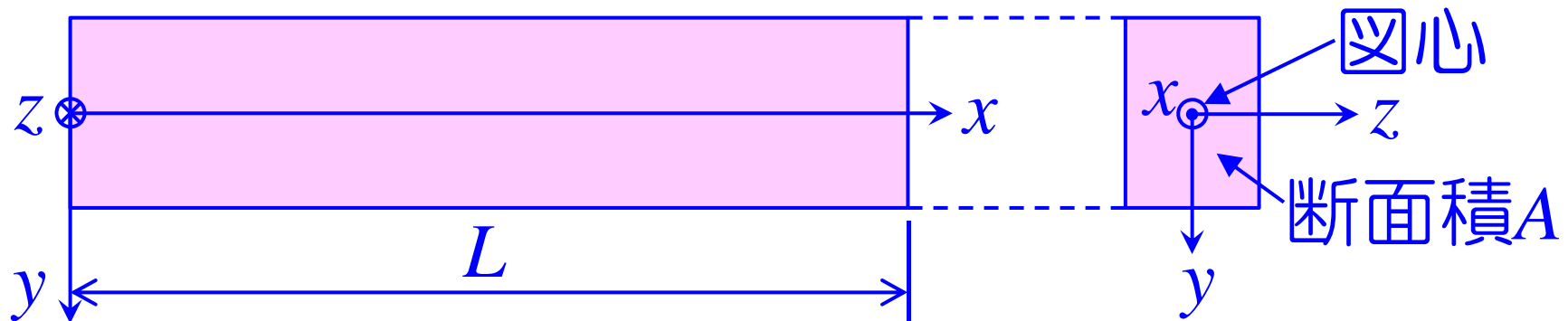


## 7. 2次元Eulerはりの内部仮想仕事

$$\begin{aligned}
 \delta U &= \int_0^L \int_A E(u'_{0x} - yu''_{0y})(\delta u'_{0x} - y\delta u''_{0y})dAdx \\
 &= \int_0^L u'_{0x} \delta u'_{0x} E \left( \int_A dA \right) dx - \int_0^L u'_{0x} \delta u''_{0y} E \left( \int_A y dA \right) dx \quad (13) \\
 &\quad - \int_0^L u''_{0y} \delta u'_{0x} E \left( \int_A y dA \right) dx + \int_0^L u''_{0y} \delta u''_{0y} E \left( \int_A y^2 dA \right) dx
 \end{aligned}$$

式(13)において，図心軸まわりの断面1次モーメントより

$$\int_A y dA = 0 \quad (14)_1$$



## 7. 2次元Eulerはりの内部仮想仕事

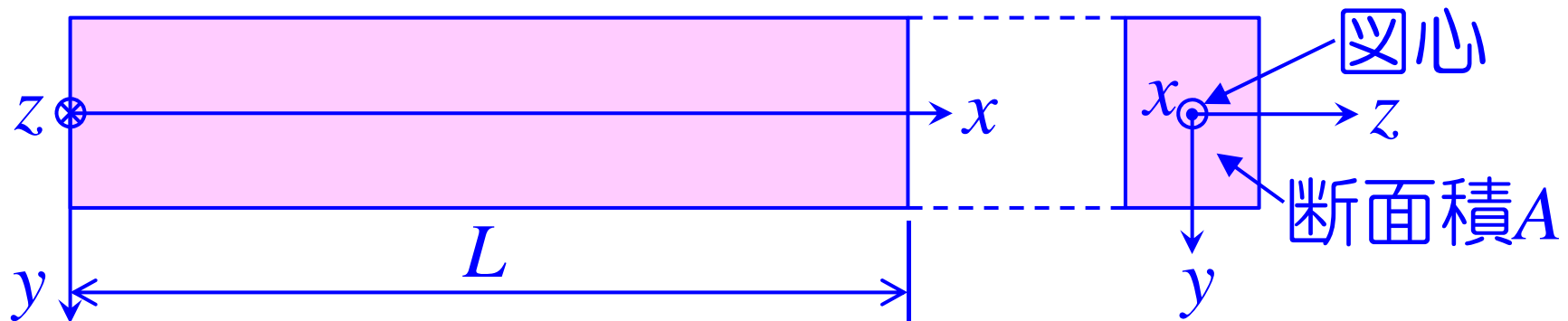
式(13)において，断面積より  $\int_A dA = A$  (14)<sub>2</sub>

図心軸まわりの断面2次モーメントより

$$\int_A y^2 dA = I_z \quad (14)_3$$

式(14)を式(13)に代入

$$\delta U = \int_0^L EAu'_{0x} \delta u'_{0x} dx + \int_0^L EI_z u''_{0y} \delta u''_{0y} dx \quad (15)$$



## 8. 2次元Eulerはりの外部仮想仕事

物体力（自重）を無視すると，式(2)より

$$\delta W = \int_{S_t} (t_x \delta u_x + t_y \delta u_y) dS \quad (16)$$

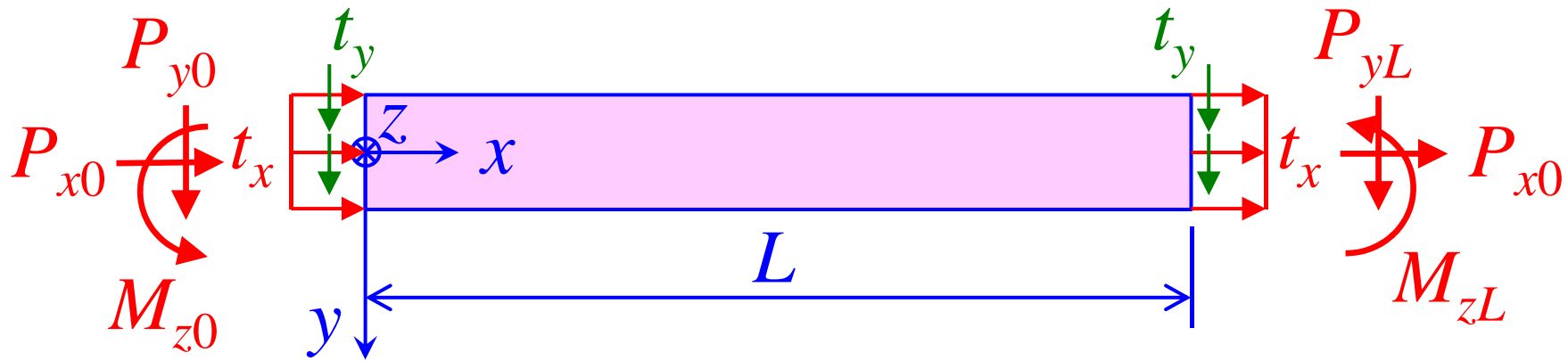
式(7)の変位より，仮想変位 $\delta u_x$ ， $\delta u_y$ は，

$$\begin{aligned} \delta u_x &= \delta u_{0x} - y \delta u'_{0y} \\ \delta u_y &= \delta u_{0y} \end{aligned} \quad (17)_{1,2}$$

式(17)を式(16)に代入すると，

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{S_t} \{ t_x (\delta u_{0x} - y \delta u'_{0y}) + t_y \delta u_{0y} \} dS \\ &= \left( \int_{S_t} t_x dS \right) \delta u_{0x} - \left( \int_{S_t} y t_x dS \right) \delta u'_{0y} + \left( \int_{S_t} t_y dS \right) \delta u_{0y} \end{aligned} \quad (18)$$

## 8. 2次元Eulerはりの外部仮想仕事



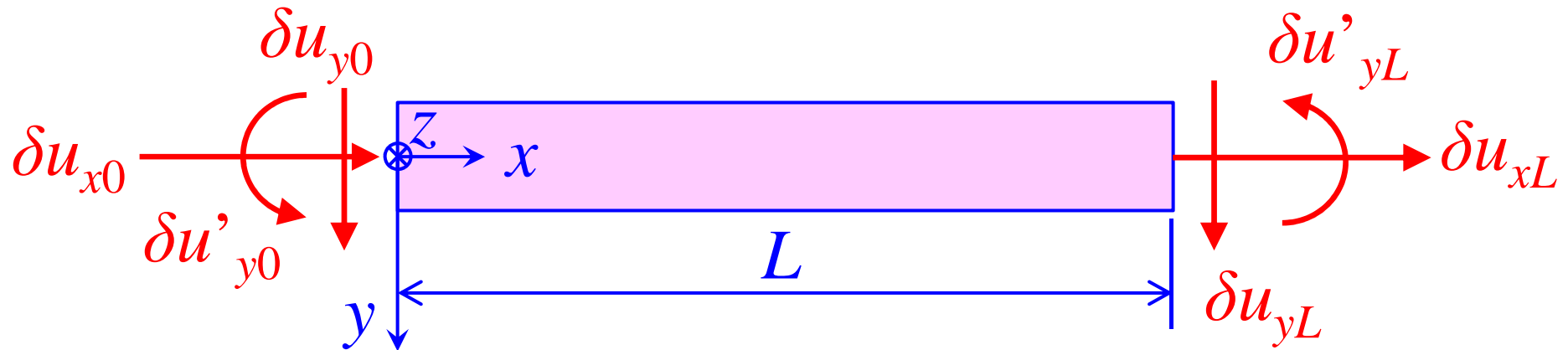
外力（表面力）の  $x=0, L$  のみへの作用を仮定

$$\begin{aligned}
 \left( \int_{S_t} t_x dS \right)_{x=0} &= P_{x0} & \left( \int_{S_t} t_x dS \right)_{x=L} &= P_{xL} \\
 \left( \int_{S_t} t_y dS \right)_{x=0} &= P_{y0} & \left( \int_{S_t} t_y dS \right)_{x=L} &= P_{yL} \\
 \left( \int_{S_t} yt_x dS \right)_{x=0} &= M_{z0} & \left( \int_{S_t} yt_x dS \right)_{x=L} &= M_{zL}
 \end{aligned} \tag{19}_{1\sim 6}$$



## 8. 2次元Eulerはりの外部仮想仕事

$x = 0, L$ における仮想変位



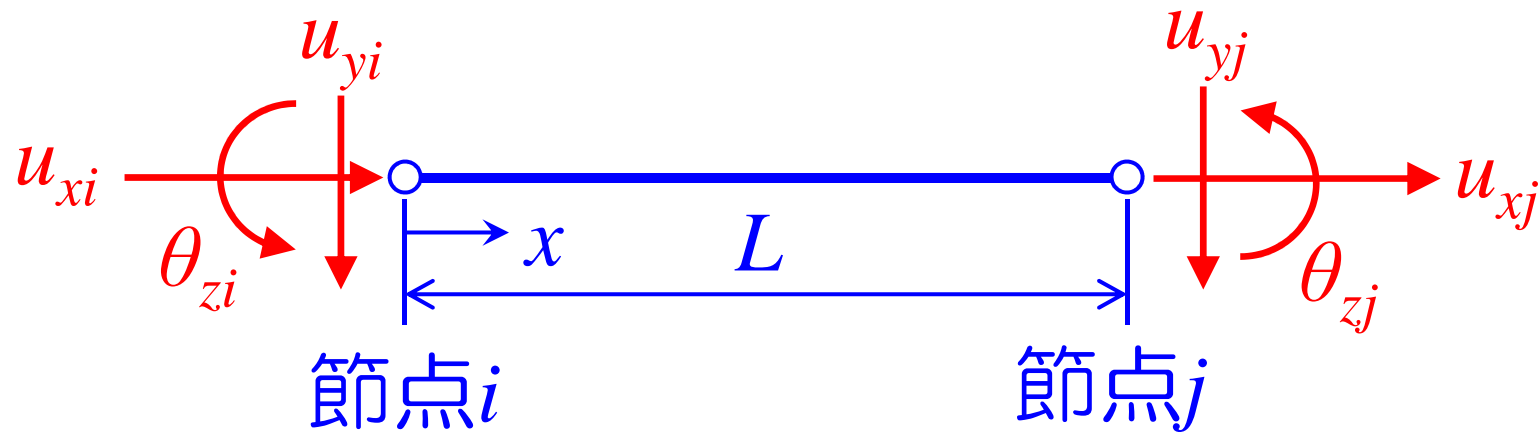
式(19)を式(18)に代入すると,

$$\begin{aligned} \delta W = & P_{x0} \delta u_{x0} + P_{xL} \delta u_{xL} + M_{z0} \delta u'_{y0} \\ & + M_{zL} \delta u'_{yL} + P_{y0} \delta u_{y0} + P_{yL} \delta u_{yL} \end{aligned} \quad (20)$$

## 9. 2次元Eulerはり要素の変位の近似

- ✓ 両端2節点要素
- ✓ 要素内変位：節点変位で近似

節点変位

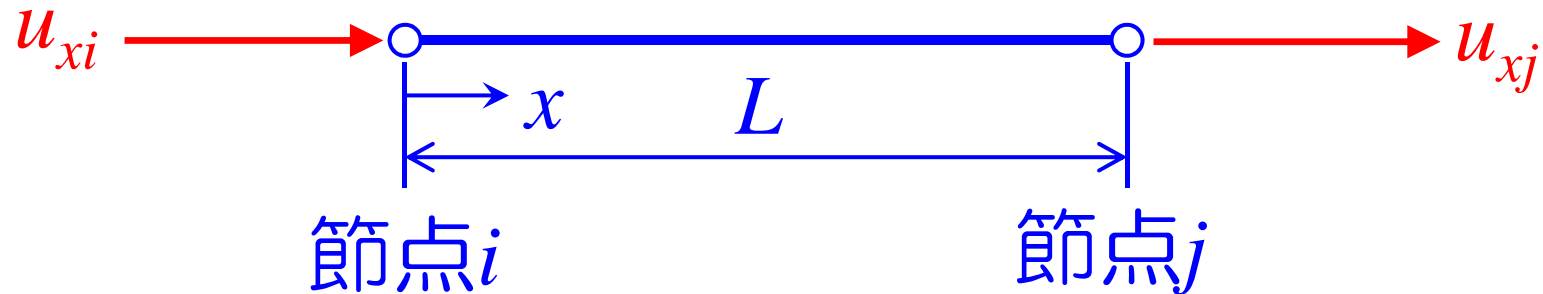


$$\theta_{zi} = \left. \frac{du_{0y}}{dx} \right|_{x=0}$$

$$\theta_{zj} = \left. \frac{du_{0y}}{dx} \right|_{x=L}$$

## 9. 2次元Eulerはり要素の変位の近似

節点変位



✓ 要素内 $x$ 軸方向変位： $x$ の1次関数で近似

$$\begin{aligned} u_{0x}(x) &= \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_{xi} + \frac{x}{L}u_{xj} = \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u_{xj} \end{Bmatrix} \\ &= [N_L] \{u_e\} \end{aligned} \quad (21)$$

## 9. 2次元Eulerはり要素の変位の近似



- ✓ 要素内*y*軸方向変位：*x*の3次関数で近似

$$u_{0y}(x) = \left\{ 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \right\} u_{yi} + \left( x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \theta_{zi} \\ + \left\{ 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \right\} u_{yj} + \left( -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \theta_{zj}$$

## 9. 2次元Eulerはり要素の変位の近似

$$u_{0y}(x) = \begin{bmatrix} 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 & x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 & -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{yi} & \theta_{zi} & u_{yj} & \theta_{zj} \end{Bmatrix}^T$$
$$= [N_E] \{v_e\} \quad (22)$$

式(21), (22)の微分は,

$$u'_{0x} = [N'_L] \{u_e\}$$

$$u'_{0y} = [N''_E] \{v_e\}$$

(23)<sub>1,2</sub>

# 10. 2次元Eulerはりの要素剛性方程式

式(23)の変分は,

$$\begin{aligned}\delta u'_{0x} &= [N'_L] \{\delta u_e\} \\ \delta u''_{0y} &= [N''_E] \{\delta v_e\}\end{aligned}\tag{24}_{1,2}$$

式(24)を内部仮想仕事式(15)に代入すると,

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_0^L EA \{\delta u_e\}^T [N'_L]^T [N'_L] \{u_e\} dx \\ &+ \int_0^L EI_z \{\delta v_e\}^T [N''_E]^T [N''_E] \{v_e\} dx\end{aligned}$$

# 10. 2次元Eulerはりの要素剛性方程式

$$\begin{aligned} \delta U = & \{\delta u_e\}^T \left( \int_0^L EA [N'_L]^T [N'_L] dx \right) \{u_e\} \\ & + \{\delta v_e\}^T \left( \int_0^L EI_z [N'_E]^T [N'_E] dx \right) \{v_e\} \end{aligned} \quad (25)$$

式(25)において,

$$\begin{aligned} \int_0^L EA [N'_L]^T [N'_L] dx &= \int_0^L EA \begin{bmatrix} -1/L \\ 1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} dx \\ &= \int_0^L \frac{EA}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

# 10. 2次元Eulerはりの要素剛性方程式

$$\begin{aligned} & \{\delta u_e\}^T \left( \int_0^L EA [N'_L]^T [N'_L] dx \right) \{u_e\} && \text{(y方向変位, 回転} \\ & = \{\delta u\}^T \left( \int_0^L EA [N'_L]^T [N'_L] dx \right) \{u\} && \text{変位含めて拡張)} \end{aligned}$$

$$= \begin{Bmatrix} \delta u_{xi} \\ \delta u_{yi} \\ \delta \theta_{zi} \\ \delta u_{xj} \\ \delta u_{yj} \\ \delta \theta_{zj} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & EA/L & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ \theta_{zi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

*sym.*



# 10. 2次元Eulerはりの要素剛性方程式

式(25)において,

$$\int_0^L EI_z [N'_E]^T [N'_E] dx$$

$$= \int_0^L \left( EI_z \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix}^T \right) dx$$

$$= \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{sym.} & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

# 10. 2次元Eulerはりの要素剛性方程式

$$\begin{aligned} & \{\delta v_e\}^T \left( \int_0^L EI_z [N'_E]^T [N'_E] dx \right) \{v_e\} \\ & = \{\delta u\}^T \left( \int_0^L EI_z [N'_E]^T [N'_E] dx \right) \{u\} \end{aligned}$$

(y方向変位, 回転  
変位含めて拡張)

$$= \begin{Bmatrix} \delta u_{xi} \\ \delta u_{yi} \\ \delta \theta_{zi} \\ \delta u_{xj} \\ \delta u_{yj} \\ \delta \theta_{zj} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 12EI_z/L^3 & 6EI_z/L^2 & 0 & -12EI_z/L^3 & 6EI_z/L^2 \\ & & 4EI_z/L & 0 & -6EI_z/L^2 & 2EI_z/L \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & 12EI_z/L^3 & -6EI_z/L^2 \\ & & & & & 4EI_z/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ \theta_{zi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

# 10. 2次元Eulerはりの要素剛性方程式 式(27), (28)を内部仮想仕事式(25)に代入

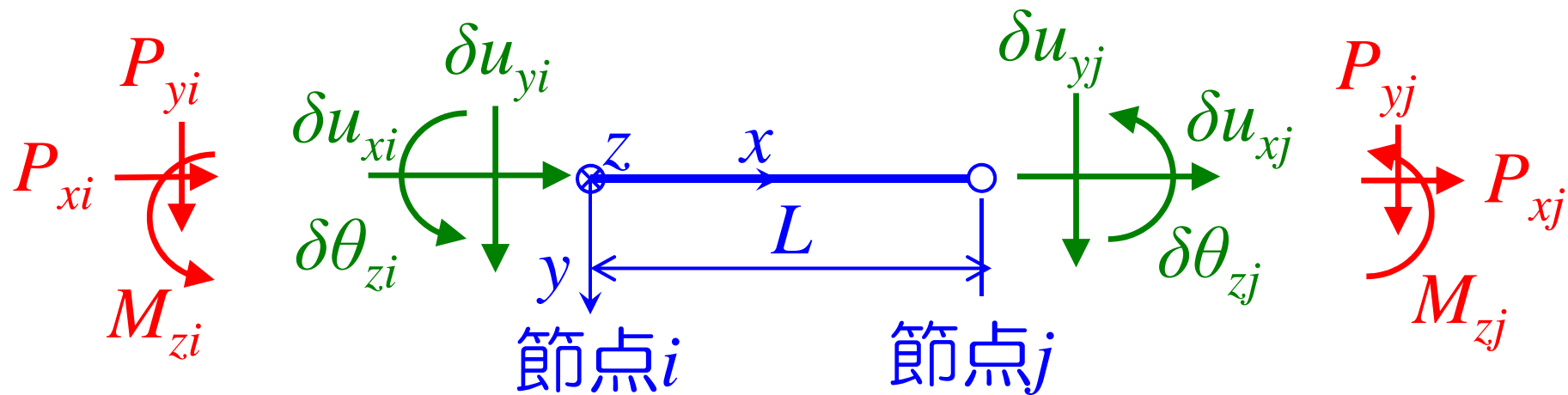
$$\delta U = \{\delta u\}^T \left( \int_0^L EA [N'_L]^T [N'_L] dx \right) \{u\} + \{\delta v\}^T \left( \int_0^L EI_z [N'_E]^T [N'_E] dx \right) \{v\}$$

$$= \begin{Bmatrix} \delta u_{xi} \\ \delta u_{yi} \\ \delta \theta_{zi} \\ \delta u_{xj} \\ \delta u_{yj} \\ \delta \theta_{zj} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ & 12EI_z/L^3 & 6EI_z/L^2 & 0 & -12EI_z/L^3 & 6EI_z/L^2 \\ & & 4EI_z/L & 0 & -6EI_z/L^2 & 2EI_z/L \\ & & & EA/L & 0 & 0 \\ & sym. & & & 12EI_z/L^3 & -6EI_z/L^2 \\ & & & & & 4EI_z/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ \theta_{zi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix}$$

(29)

# 10. 2次元Eulerはりの要素剛性方程式

## 節点力と仮想節点変位



式(20)より仮想外力仕事式は

$$\begin{aligned}\delta W &= P_{xi} \delta u_{xi} + P_{yi} \delta u_{yi} + M_{zi} \delta \theta_{zi} + P_{xj} \delta u_{xj} + P_{yj} \delta u_{yj} + M_{zj} \delta \theta_{zj} \\ &= \left\{ \delta u_{xi} \quad \delta u_{yi} \quad \delta \theta_{zi} \quad \delta u_{xj} \quad \delta u_{yj} \quad \delta \theta_{zj} \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ P_{xi} \quad P_{yi} \quad M_{zi} \quad P_{xj} \quad P_{yj} \quad M_{zj} \right\}^T = \{\delta u\}^T \{f\} \quad (30)\end{aligned}$$

# 10. 2次元Eulerはりの要素剛性方程式

式(29), (30)を仮想仕事式(3)へ代入すると,

$$\begin{aligned}
 & \begin{Bmatrix} \delta u_{xi} \\ \delta u_{yi} \\ \delta \theta_{zi} \\ \delta u_{xj} \\ \delta u_{yj} \\ \delta \theta_{zj} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ & 12EI_z/L^3 & 6EI_z/L^2 & 0 & -12EI_z/L^3 & 6EI_z/L^2 \\ & & 4EI_z/L & 0 & -6EI_z/L^2 & 2EI_z/L \\ & & & EA/L & 0 & 0 \\ & & sym. & & 12EI_z/L^3 & -6EI_z/L^2 \\ & & & & & 4EI_z/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ \theta_{zi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} \\
 & = \left\{ \delta u_{xi} \quad \delta u_{yi} \quad \delta \theta_{zi} \quad \delta u_{xj} \quad \delta u_{yj} \quad \delta \theta_{zj} \right\} \\
 & \quad \cdot \left\{ P_{xi} \quad P_{yi} \quad M_{zi} \quad P_{xj} \quad P_{yj} \quad M_{zj} \right\}^T \tag{31}
 \end{aligned}$$

$\left\{ \delta u_{xi} \quad \delta u_{yi} \quad \delta \theta_{zi} \quad \delta u_{xj} \quad \delta u_{yj} \quad \delta \theta_{zj} \right\} \neq \{0\}$  より,

# 10. 2次元Eulerはりの要素剛性方程式

$$\{f\} = \{P_{xi} \quad P_{yi} \quad M_{zi} \quad P_{xj} \quad P_{yj} \quad M_{zj}\}^T =$$
$$\begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ & 12EI_z/L^3 & 6EI_z/L^2 & 0 & -12EI_z/L^3 & 6EI_z/L^2 \\ & & 4EI_z/L & 0 & -6EI_z/L^2 & 2EI_z/L \\ & & & EA/L & 0 & 0 \\ & sym. & & & 12EI_z/L^3 & -6EI_z/L^2 \\ & & & & & 4EI_z/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ \theta_{zi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix}$$
$$= [k]\{u\} \quad (31)$$

→ 要素座標系で記述した，2次元Eulerはり要素の要素剛性方程式