

10. 有限要素法解析

(2) 2次元仮想仕事の原理と Eulerはり要素の要素剛性方程式の誘導

三好 崇夫
加藤 久人

1. 仮想仕事の原理の概要

1. 仮想仕事の原理の概要

荷重 P が作用してつり合い状態にある棒部材 (応力 σ , ひずみ ϵ も発生)

つり合い状態を維持したまま、変位を δu だけ増加

元の長さ u

δu : 仮想変位と呼ぶ

対応する仮想ひずみ $\delta\epsilon$ も発生

1. 仮想仕事の原理の概要

外部仮想仕事

仮想ひずみエネルギー密度

構造全体の体積で積分!!

仮想ひずみエネルギー

仮想仕事の原理

(外部仮想仕事) = (仮想ひずみエネルギー) = (内部仮想仕事)

1. 仮想仕事の原理の概要

「荷重-変位関係」と「応力-ひずみ関係」

外部仮想仕事 $P\delta u$

仮想ひずみエネルギー密度 $\sigma\delta\epsilon$

荷重 P

変位 u

ひずみ ϵ

1. 仮想仕事の原理の概要

表面力と物体力による外部仮想仕事

表面積 A_0

体積 V

単位体積重量 w

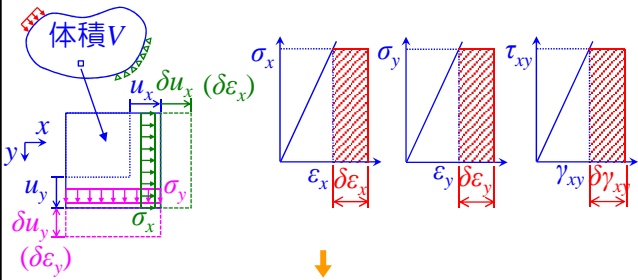
表面力 p (分布荷重)

表面力による外部仮想仕事 $= \int_{A_0} p \delta u dA$

物体力による外部仮想仕事 $= \int_V w \delta u dV$

2. 2次元仮想仕事の原理

2次元物体の内部仮想仕事 δU

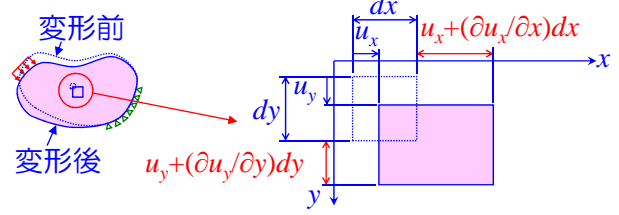


$$\delta U = \int_V (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dV \quad (1)$$

(x, y方向, 面内せん断分を足し合せて体積分)

3. 2次元ひずみと変位の関係

直ひずみ



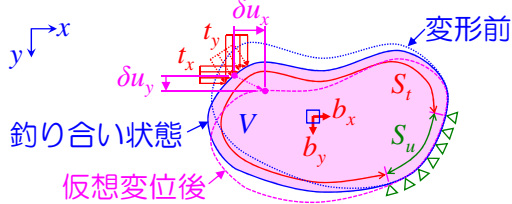
$$x \text{方向} : \epsilon_x = \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx - u_x \right) / dx = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

(4)_{1,2}

$$y \text{方向} : \epsilon_y = \left(u_y + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy - u_y \right) / dy = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

2. 2次元仮想仕事の原理

2次元物体の外部仮想仕事 δW

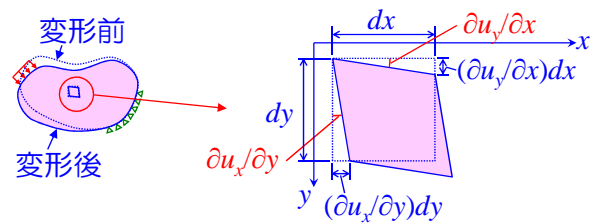


$$\delta W = \underbrace{\int_{S_t} (t_x \delta u_x + t_y \delta u_y) dS}_{\text{表面力項}} + \underbrace{\int_V (b_x \delta u_x + b_y \delta u_y) dV}_{\text{物体力項}} \quad (2)$$

(x, y方向分を足し合せ, 表面力は境界条件の規定されていない面積, 物体力は体積で積分)

3. 2次元ひずみと変位の関係

せん断ひずみ



$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (4)_3$$

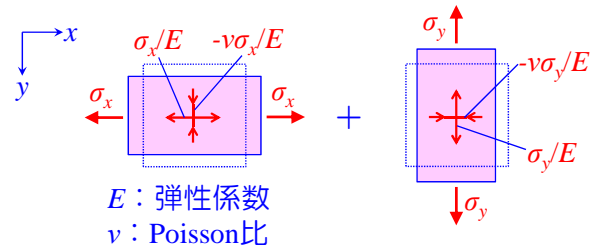
2. 2次元仮想仕事の原理

2次元物体の仮想仕事式

(外部仮想仕事) = (内部仮想仕事)
 $\delta W = \delta U$

$$\int_{S_t} (t_x \delta u_x + t_y \delta u_y) dS + \int_V (b_x \delta u_x + b_y \delta u_y) dV = \int_V (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dV \quad (3)$$

4. 2次元応力とひずみの関係



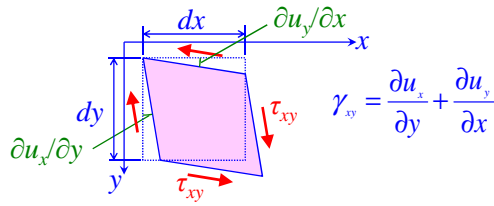
E : 弾性係数
nu : Poisson比

$$x \text{方向直ひずみ合計} : \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}$$

(5)_{1,2}

$$y \text{方向直ひずみ合計} : \epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E}$$

4. 2次元応力とひずみの関係



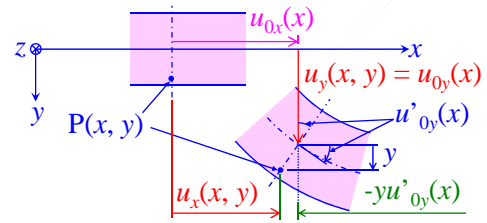
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

$$x\text{方向直応力} : \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y)$$

$$y\text{方向直応力} : \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu\epsilon_x + \epsilon_y) \quad (6)_{1\sim3}$$

$$\text{せん断応力} : \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}$$

5. 2次元Eulerはりの変位



$$x\text{方向変位} : u_x(x,y) = u_{0x}(x) - y \frac{du_{0y}(x)}{dx} = u_{0x}(x) - yu'_{0y}(x)$$

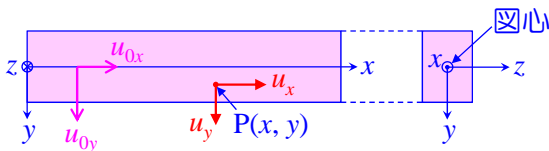
$$y\text{方向変位} : u_y(x,y) = u_{0y}(x) \quad (7)_{1,2}$$

→ 断面無変形の仮定 : $u_x, u_y \rightarrow u_{0x}, u_{0y}$ のみで表示

5. 2次元Eulerはりの変位

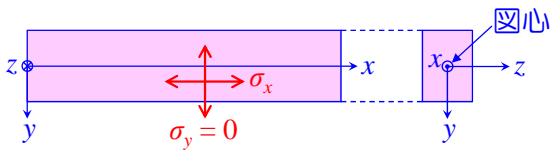
はり

- ✓ 3 or 2次元問題を1次元化したもの
- ✓ はり内部の任意点の変位 u_x, u_y : x のみの関数
- ✓ 1次元化のため, 断面無変形, 断面内無応力の仮定, Eulerの仮定を導入



6. 2次元Eulerはりの応力, ひずみ

はり内部の応力



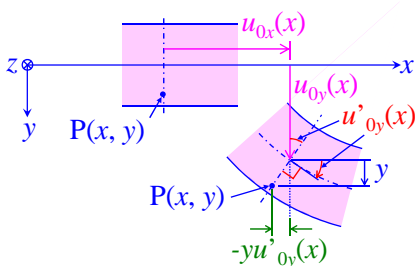
$$\text{断面内無応力の仮定} : \sigma_y = 0 \quad (8)_1$$

$$\text{式(5)}_1\text{より, } \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} = \frac{\sigma_x}{E} \rightarrow \sigma_x = E\epsilon_x \quad (8)_2$$

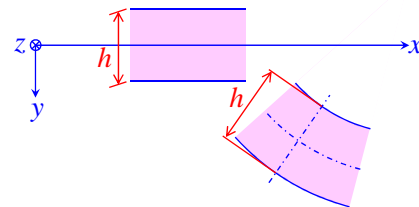
5. 2次元Eulerはりの変位

はり内部の変位

Eulerの仮定 : 「変形後の断面は変形後の部材軸に直交」を前提に定式



6. 2次元Eulerはりの応力, ひずみ



はり内部のひずみ

$$\text{断面無変形の仮定} : \epsilon_y = 0 \quad (9)_1$$

式(4)₃に式(7)を代入して,

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = -u'_{0y}(x) + u'_{0y}(x) = 0 \quad (9)_2$$

7. 2次元Eulerはりの内部仮想仕事

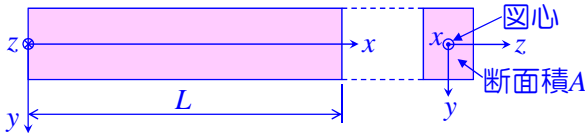
式(1)に式(8), (9)₂を代入

$$\delta U = \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dV = \int_V E \varepsilon_x \delta \varepsilon_x dV \quad (10)$$

$$= \int_0^L \int_A E \varepsilon_x \delta \varepsilon_x dA dx \quad \text{: はり長さ } L, \text{ 断面積 } A \text{ とする}$$

式(7)₁を式(4)₂に代入

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = u'_{0x} - y u''_{0y} \quad (11)$$



7. 2次元Eulerはりの内部仮想仕事

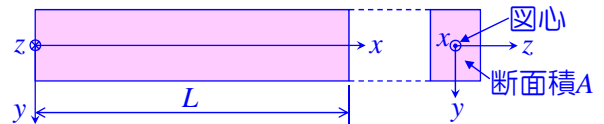
式(13)において, 断面積より $\int_A dA = A \quad (14)_2$

図心軸まわりの断面2次モーメントより

$$\int_A y^2 dA = I_z \quad (14)_3$$

式(14)を式(13)に代入

$$\delta U = \int_0^L EA u'_{0x} \delta u'_{0x} dx + \int_0^L EI_z u''_{0y} \delta u''_{0y} dx \quad (15)$$



7. 2次元Eulerはりの内部仮想仕事

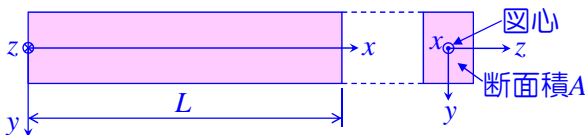
式(11)の変分

$$\delta \varepsilon_x = \delta u'_{0x} - y \delta u''_{0y} \quad (12)$$

式(11), (12)を式(10)へ代入

$$\delta U = \int_0^L \int_A E \varepsilon_x \delta \varepsilon_x dA dx$$

$$= \int_0^L \int_A E (u'_{0x} - y u''_{0y}) (\delta u'_{0x} - y \delta u''_{0y}) dA dx$$



8. 2次元Eulerはりの外部仮想仕事

物体力(自重)を無視すると, 式(2)より

$$\delta W = \int_{S_t} (t_x \delta u_x + t_y \delta u_y) dS \quad (16)$$

式(7)の変位より, 仮想変位 $\delta u_x, \delta u_y$ は,

$$\delta u_x = \delta u_{0x} - y \delta u'_{0y}$$

$$\delta u_y = \delta u_{0y} \quad (17)_{1,2}$$

式(17)を式(16)に代入すると,

$$\delta W = \int_{S_t} \{ t_x (\delta u_{0x} - y \delta u'_{0y}) + t_y \delta u_{0y} \} dS$$

$$= \left(\int_{S_t} t_x dS \right) \delta u_{0x} - \left(\int_{S_t} y t_x dS \right) \delta u'_{0y} + \left(\int_{S_t} t_y dS \right) \delta u_{0y} \quad (18)$$

7. 2次元Eulerはりの内部仮想仕事

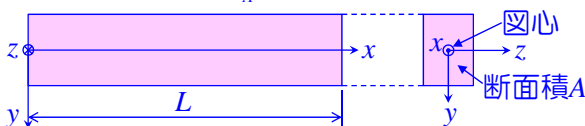
$$\delta U = \int_0^L \int_A E (u'_{0x} - y u''_{0y}) (\delta u'_{0x} - y \delta u''_{0y}) dA dx$$

$$= \int_0^L u'_{0x} \delta u'_{0x} E \left(\int_A dA \right) dx - \int_0^L u'_{0x} \delta u'_{0y} E \left(\int_A y dA \right) dx \quad (13)$$

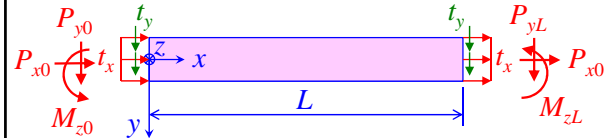
$$- \int_0^L u''_{0y} \delta u'_{0x} E \left(\int_A y dA \right) dx + \int_0^L u''_{0y} \delta u''_{0y} E \left(\int_A y^2 dA \right) dx$$

式(13)において, 図心軸まわりの断面1次モーメントより

$$\int_A y dA = 0 \quad (14)_1$$



8. 2次元Eulerはりの外部仮想仕事



外力(表面力)の $x=0, L$ のみへの作用を仮定

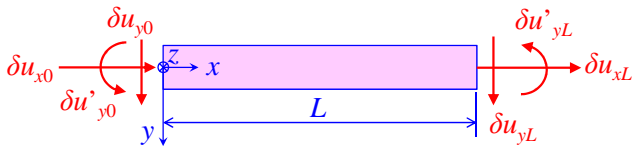
$$\left(\int_{S_t} t_x dS \right)_{x=0} = P_{x0} \quad \left(\int_{S_t} t_x dS \right)_{x=L} = P_{xL}$$

$$\left(\int_{S_t} t_y dS \right)_{x=0} = P_{y0} \quad \left(\int_{S_t} t_y dS \right)_{x=L} = P_{yL} \quad (19)_{1\sim6}$$

$$\left(\int_{S_t} y t_x dS \right)_{x=0} = M_{z0} \quad \left(\int_{S_t} y t_x dS \right)_{x=L} = M_{zL}$$

8. 2次元Eulerはりの外部仮想仕事

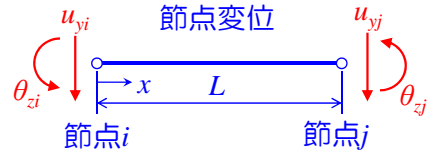
$x = 0, L$ における仮想変位



式(19)を式(18)に代入すると,

$$\delta W = P_{x0} \delta u_{x0} + P_{xL} \delta u_{xL} + M_{z0} \delta u'_{y0} + M_{zL} \delta u'_{yL} + P_{y0} \delta u_{y0} + P_{yL} \delta u_{yL} \quad (20)$$

9. 2次元Eulerはり要素の変位の近似

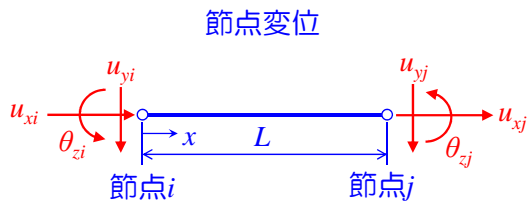


✓ 要素内y軸方向変位: x の3次関数で近似

$$u_{0y}(x) = \left\{ 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \right\} u_{yi} + \left(x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \theta_{zi} + \left\{ 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \right\} u_{yj} + \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \theta_{zj}$$

9. 2次元Eulerはり要素の変位の近似

- ✓ 両端2節点要素
- ✓ 要素内変位: 節点変位で近似



$$\theta_{zi} = \left. \frac{du_{0y}}{dx} \right|_{x=0} \quad \theta_{zj} = \left. \frac{du_{0y}}{dx} \right|_{x=L}$$

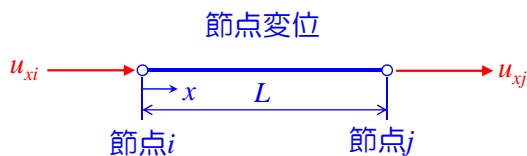
9. 2次元Eulerはり要素の変位の近似

$$u_{0y}(x) = \left[1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right] \{ u_{yi} \quad \theta_{zi} \quad u_{yj} \quad \theta_{zj} \}^T = [N_E] \{v_e\} \quad (22)$$

式(21), (22)の微分は,

$$u'_{0x} = [N'_L] \{u_e\} \quad u'_{0y} = [N'_E] \{v_e\} \quad (23)_{1,2}$$

9. 2次元Eulerはり要素の変位の近似



✓ 要素内x軸方向変位: x の1次関数で近似

$$u_{0x}(x) = \left(1 - \frac{x}{L} \right) u_{xi} + \frac{x}{L} u_{xj} = \left\{ 1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L} \right\} \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u_{xj} \end{Bmatrix} = [N_L] \{u_e\} \quad (21)$$

10. 2次元Eulerはりの要素剛性方程式

式(23)の変分は,

$$\delta u'_{0x} = [N'_L] \{ \delta u_e \} \quad \delta u'_{0y} = [N'_E] \{ \delta v_e \} \quad (24)_{1,2}$$

式(24)を内部仮想仕事式(15)に代入すると,

$$\delta U = \int_0^L EA \{ \delta u_e \}^T [N'_L]^T [N'_L] \{ u_e \} dx + \int_0^L EI_z \{ \delta v_e \}^T [N'_E]^T [N'_E] \{ v_e \} dx$$

1 O. 2次元Eulerはりの要素剛性方程式

$$\delta U = \{\delta u_e\}^T \left(\int_0^L EA [N'_L]^T [N'_L] dx \right) \{u_e\} + \{\delta v_e\}^T \left(\int_0^L EI_z [N'_E]^T [N'_E] dx \right) \{v_e\} \quad (25)$$

式(25)において,

$$\int_0^L EA [N'_L]^T [N'_L] dx = \int_0^L EA \begin{bmatrix} -1/L \\ 1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} dx = \int_0^L \frac{EA}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

1 O. 2次元Eulerはりの要素剛性方程式

$$\{\delta v_e\}^T \left(\int_0^L EI_z [N'_E]^T [N'_E] dx \right) \{v_e\} \quad (\text{y方向変位, 回転変位含めて拡張}) = \{\delta u\}^T \left(\int_0^L EI_z [N'_E]^T [N'_E] dx \right) \{u\}$$

$$= \begin{Bmatrix} \delta u_{xi} \\ \delta u_{yi} \\ \delta \theta_{zi} \\ \delta u_{xj} \\ \delta u_{yj} \\ \delta \theta_{zj} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12EI_z/L^3 & 6EI_z/L^2 & 0 & -12EI_z/L^3 & 6EI_z/L^2 & 0 \\ & 4EI_z/L & 0 & -6EI_z/L^2 & 2EI_z/L & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & 12EI_z/L^3 & -6EI_z/L^2 & 0 \\ & & & & 4EI_z/L & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ \theta_{zi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

1 O. 2次元Eulerはりの要素剛性方程式

$$\{\delta u_e\}^T \left(\int_0^L EA [N'_L]^T [N'_L] dx \right) \{u_e\} \quad (\text{y方向変位, 回転変位含めて拡張}) = \{\delta u\}^T \left(\int_0^L EA [N'_L]^T [N'_L] dx \right) \{u\}$$

$$= \begin{Bmatrix} \delta u_{xi} \\ \delta u_{yi} \\ \delta \theta_{zi} \\ \delta u_{xj} \\ \delta u_{yj} \\ \delta \theta_{zj} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & EA/L & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ \theta_{zi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

1 O. 2次元Eulerはりの要素剛性方程式

式(27), (28)を内部仮想仕事式(25)に代入

$$\delta U = \{\delta u\}^T \left(\int_0^L EA [N'_L]^T [N'_L] dx \right) \{u\} + \{\delta v\}^T \left(\int_0^L EI_z [N'_E]^T [N'_E] dx \right) \{v\} = \begin{Bmatrix} \delta u_{xi} \\ \delta u_{yi} \\ \delta \theta_{zi} \\ \delta u_{xj} \\ \delta u_{yj} \\ \delta \theta_{zj} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ & 12EI_z/L^3 & 6EI_z/L^2 & 0 & -12EI_z/L^3 & 6EI_z/L^2 \\ & & 4EI_z/L & 0 & -6EI_z/L^2 & 2EI_z/L \\ & & & EA/L & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & 12EI_z/L^3 & -6EI_z/L^2 \\ & & & & & 4EI_z/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ \theta_{zi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

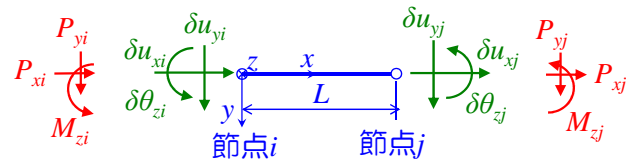
1 O. 2次元Eulerはりの要素剛性方程式

式(25)において,

$$\int_0^L EI_z [N'_E]^T [N'_E] dx = \int_0^L EI_z \begin{bmatrix} -6/L^2 + 12x/L^3 & -4/L + 6x/L^2 & 6/L^2 - 12x/L^3 & -4/L + 6x/L^2 \\ -6/L^2 + 12x/L^3 & -4/L + 6x/L^2 & 6/L^2 - 12x/L^3 & -4/L + 6x/L^2 \end{bmatrix} dx = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{sym.} & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

1 O. 2次元Eulerはりの要素剛性方程式

節点力と仮想節点変位



式(20)より仮想外力仕事式は

$$\delta W = P_{xi} \delta u_{xi} + P_{yi} \delta u_{yi} + M_{zi} \delta \theta_{zi} + P_{xj} \delta u_{xj} + P_{yj} \delta u_{yj} + M_{zj} \delta \theta_{zj} = \{\delta u\} \begin{bmatrix} \delta u_{xi} & \delta u_{yi} & \delta \theta_{zi} & \delta u_{xj} & \delta u_{yj} & \delta \theta_{zj} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \\ M_{zi} \\ P_{xj} \\ P_{yj} \\ M_{zj} \end{Bmatrix} = \{\delta u\}^T \{f\} \quad (30)$$

1 O. 2次元Eulerはりの要素剛性方程式

式(29), (30)を仮想仕事式(3)へ代入すると,

$$\begin{Bmatrix} \delta u_{xi} \\ \delta u_{yi} \\ \delta \theta_{zi} \\ \delta u_{xj} \\ \delta u_{yj} \\ \delta \theta_{zj} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ & 12EI_z/L^3 & 6EI_z/L^2 & 0 & -12EI_z/L^3 & 6EI_z/L^2 \\ & & 4EI_z/L & 0 & -6EI_z/L^2 & 2EI_z/L \\ & & & EA/L & 0 & 0 \\ sym. & & & & 12EI_z/L^3 & -6EI_z/L^2 \\ & & & & & 4EI_z/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ \theta_{zi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} \\ = \begin{Bmatrix} \delta u_{xi} & \delta u_{yi} & \delta \theta_{zi} & \delta u_{xj} & \delta u_{yj} & \delta \theta_{zj} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} P_{xi} & P_{yi} & M_{zi} & P_{xj} & P_{yj} & M_{zj} \end{Bmatrix}^T \quad (31)$$

$\{\delta u_{xi} \ \delta u_{yi} \ \delta \theta_{zi} \ \delta u_{xj} \ \delta u_{yj} \ \delta \theta_{zj}\} \neq \{0\}$ より,

1 O. 2次元Eulerはりの要素剛性方程式

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} P_{xi} & P_{yi} & M_{zi} & P_{xj} & P_{yj} & M_{zj} \end{Bmatrix}^T = \\ \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ & 12EI_z/L^3 & 6EI_z/L^2 & 0 & -12EI_z/L^3 & 6EI_z/L^2 \\ & & 4EI_z/L & 0 & -6EI_z/L^2 & 2EI_z/L \\ & & & EA/L & 0 & 0 \\ sym. & & & & 12EI_z/L^3 & -6EI_z/L^2 \\ & & & & & 4EI_z/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ \theta_{zi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} \\ = [k]\{u\} \quad (31)$$

→ 要素座標系で記述した, 2次元Eulerはり要素の要素剛性方程式