

曲げ変形とせん断変形（前編）

三好崇夫

加藤久人

1. せん断変形の影響が顕著な事例

実務設計でせん断変形の影響が無視できない事例として、高さ h が部材長 L に比べて大きい、 h/L が $1/10$ よりも小さいはり部材が挙げられる。 $h/L = 1/5$ ではせん断変形に伴うたわみが曲げに伴うたわみの $20\sim 30\%$ に達し、さらに $h/L = 1/3$ になるとせん断変形によるたわみと曲げ変形に伴うたわみは同程度になる。これについては本資料で計算例として示す。マトリックス変位法による構造解析ソフトを用いて同構造を解析する場合には、せん断変形の取り扱いに注意が必要である。

はり部材におけるせん断変形の影響は、トラス桁をはり部材に置換するような構造解析において重要となる¹⁾。トラス桁におけるせん断変形は主として斜材の伸縮変形に起因するから、充腹桁に比べてせん断変形の影響は顕著になる。トラス形式の補剛桁を持つ長大吊橋の構造解析においても、補剛桁をはりに置換する場合には、補剛桁のせん断変形を無視することはできなくなる²⁾。

トラス桁を置換したはりモデルを用いた座屈解析や振動解析においても、せん断変形の影響を考慮する必要がある。特に、振動問題においては高次振動モードにおいて、せん断変形の影響が顕著に現れることが知られている¹⁾。これは実吊橋による高次振動モードの計測結果とせん断変形を考慮した吊橋理論による固有振動解析結果の比較によっても明らかとされている²⁾。

2. 本資料の内容

構造解析におけるせん断変形の取扱いは既に多くの文献^{3)~9)}で述べられており、現在では、はり部材のせん断変形を考慮した構造解析ソフト^{10)~12)}も実務設計に用いられている。それらは、Timoshenko（チモシェンコ）の仮定に従うはり理論に基づいている。同理論では、Bernoulli-Euler（ベルヌーイ＝オイラー）の仮定に従うはりの曲げ理論と異なり、曲げ変形とせん断変形を同時に考慮しなければならない。また、集中モーメント等を受けるはりのせん断変形は特徴的である。この場合はりの長方形の側面形状が平行四辺形に変形し、通常のはりのたわみとは異なる概念の変形が現れる。

本資料では、はりの曲げ理論の延長線上でそれらが容易に理解できるように、「曲げ変形とせん断変形（前編）」、「同（中編）」と「同（後編）」の3回に分けて、以下の内容で説明する。

（1）「曲げ変形とせん断変形（前編）」

- ・ 静定ばりの曲げたわみとせん断たわみの分離
- ・ 静定ばりのせん断変形の計算法とその適用例
- ・ 単純ばりの全たわみに及ぼすせん断変形の影響

（2）「曲げ変形とせん断変形（中編）」

- ・ 重ね合わせの原理
- ・ 不静定ばりへの重ね合わせの原理の応用
- ・ マトリックス変位法

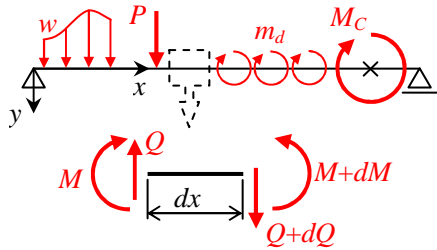


図-1 はりの座標系，外力と断面力の向きと方向

表-1 荷重，反力と断面力の表記に用いる記号一覧

荷重(外力)			
分布荷重 (kN/m)	w	分布モーメント (kNm/m)	m_d
集中荷重 (kN)	P	集中モーメント (kNm)	M_C
反力			
反力 (kN)	R	反力モーメント (kNm)	M_R
断面力			
せん断力 (kN)	Q	曲げモーメント (kNm)	M

(3) 「曲げ変形とせん断変形(後編)」

- ・せん断変形を考慮したはりのたわみに関する微分方程式
- ・微分方程式を用いたせん断変形の計算例
- ・微分方程式の直列バネとの相似性

上記の資料では、まず、静定ばりに関して曲げ変形とせん断変形を独立に扱うことによる、せん断変形の計算方法について示す。次に、それらを基本として、不静定ばりの解析やマトリックス変位法におけるせん断変形の取り扱い方法について説明する。最後に、それらの取り扱い方法と Timoshenko の仮定に従うはり理論における微分方程式との関係を明確にする。

3. 静定ばりの曲げたわみとせん断たわみの分離

図-1 に本資料で扱うはりの座標系と荷重(外力)の正の向きを示すとともに、表-1 には荷重、断面力と反力の表示に用いる記号の一覧を示す。図-1 中の x 軸は変形前のはりの軸方向(水平方向)に平行な右向きを正とする座標である。 y 軸は x 軸に直交する(鉛直方向)下向きを正とする座標系である。また、 w は分布荷重、 P は集中荷重、 m_d は分布モーメント荷重、 M_C は集中モーメント荷重、 Q 、 M は断面力であり、それぞれせん断力、曲げモーメントを表す。

単純ばり、片持ばり等の静定ばりでは、せん断力や曲げモーメントの分布は、曲げ剛性やせん断剛性とは無関係に、力の釣り合い条件のみから求められる。このため、静定ばりに生ずるたわみは、曲げ変形によるたわみとせん断変形によるたわみに分離することができ、各々を個別に求めて、それらを合計して求めることができる。それぞれ図-2(a)~(d)と(e)~(h)には、単純ばりに集中荷重と集中モーメントが作用した場合の変形状況を誇張して示している。

同図(b)と(f)の曲げたわみ v_b は一般的な Bernoulli-Euler の仮定に従って生ずるものであり、これによって変形前に鉛直方向と平行であった断面は回転して、変形後のはり軸に直角に交わることになる。もちろん、平面保持の仮定に従って断面は変形前後で平面をなす。したがって、変形前にはり側面に引いた格子線で囲まれる微小要素は、変形前の長方形から台形へと変形する。一方、同図(c)と(g)のせん断たわみ v_s は Timoshenko の仮定⁷⁾に従って生ずるものであり、平面保持則に従って変形前後の断面は平面をなすものの、変形前に鉛直方向と平行であった断面は変形後のはり軸には直角に交わらなくなる。詳細は第4章で説明するが、同図(c)に示すように、集中荷重を受けるはりの断面は、せん断変形によってもはり全長にわたって変形前と変わらず鉛直方向と平行である。これに対して、同図(g)に示すように、集中モーメントを受けるはりの断面は、せん断変形によってもはり両端部の断面を含めて鉛直方向から時計

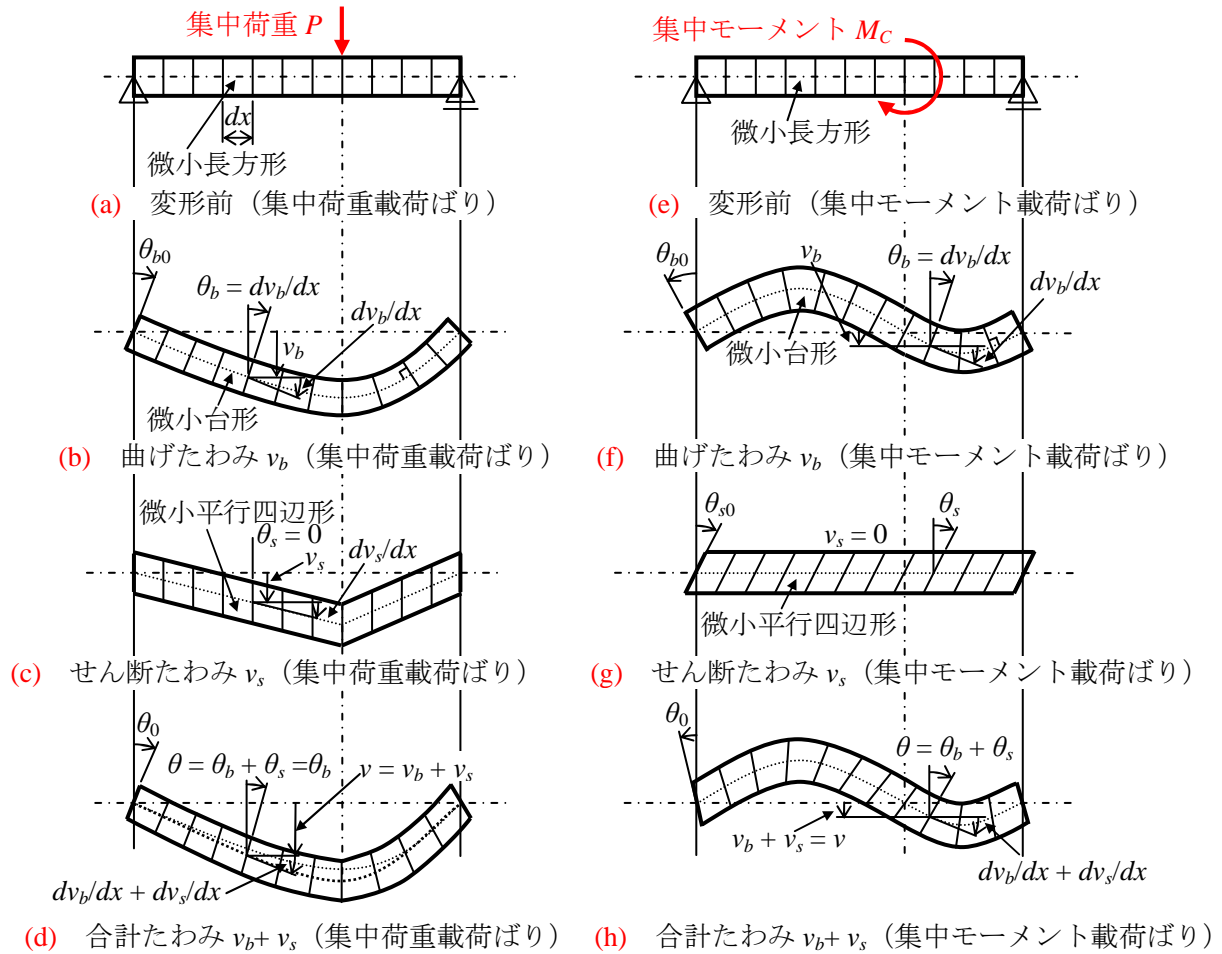


図-2 曲げ変形とせん断変形への分解

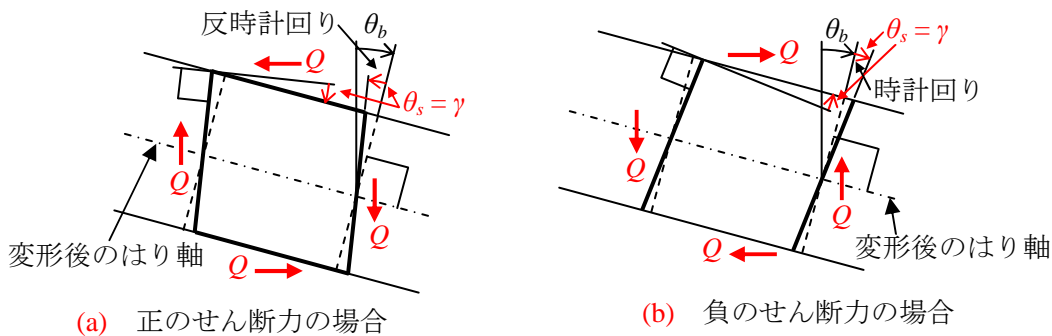


図-3 せん断変形による断面の回転

回りに θ_s だけ回転し、側面形状が長方形から平行四辺形に変形するものの、たわみは生じない。

せん断力が生ずる微小要素のせん断変形は概略的に図-3のように生じるものと考えられる。即ち、せん断ひずみを γ とすると、変形前にはり軸に対して直角な断面は、同図(a)に示すような正のせん断力では反時計回りに $\gamma (= \theta_s)$ 回転し、同図(b)に示すような負のせん断力では時計回りに $\gamma (= \theta_s)$ 回転する。せん断力がはり軸方向に変化しない場合には γ が一定となるため、集中荷重や集中モーメントを受ける単純ばりのせん断変形は、それぞれ図-2(c)と(g)のように生ずることが、図-3 から直感的に把握できる。しかし、 γ が変化する場合の変形は、第4章で説明する一般化された方法を用いて把握する必要がある。以上は、せん断力によって生ずるせん断ひずみはり断面内で一様に分布することを前提としている。しかし、実際にはせん断ひずみは断面内で非線形分布形状を呈しているため、せん断修正係数を

用いて一様な分布とみなしている．これについては別資料「せん断修正係数」で説明する．

集中荷重と集中モーメントを受ける単純ばり全体としてのたわみ v は、それぞれ図-2(d)と(h)に示すように、曲げ変形によるたわみ v_b とせん断変形によるたわみ v_s の合計として表される．いずれも変形後のはり軸と断面は直角に交わらず、変形後の断面は平面を保持する．以降では、変形後の断面が鉛直軸となす時計回りを正とする角度を断面の回転角 θ と定義する． θ は集中荷重を受ける単純ばりにおいては、曲げによるたわみ角 dv_b/dx に等しくなるが、集中モーメントを受ける単純ばりにおいては、 dv_b/dx に等しくならないので注意を要する．即ち、せん断変形を考慮したはり理論においては、断面の回転角 θ と曲げ変形によるたわみ角 dv_b/dx が等しくなるという一般性はない．

静定ばりの代表は単純ばりと片持ちばりである．変位に関する適合条件を用いることによって、不静定ばりは静定ばりに分解して扱うことができる．また、一般的に2次元はりに作用する集中荷重は、集中荷重 P と集中モーメント M_C であり、これらの荷重に対する変形が解析できれば、分布荷重 w と分布モーメント m_d による変形はそれらを作用範囲内で積分することによって扱うことが可能である．したがって、従来の曲げ変形のみを考慮したはりの解析と同様に、集中荷重を受ける静定ばりの挙動が把握できれば、連続ばりに代表される不静定ばりについてもせん断変形を考慮した解析が可能となる．

4. 静定ばりのせん断変形の計算法

図-4 に示すような単純ばりにせん断変形のみが生じた状態を考え、同はりの左側支点近傍の微小要素に着目する．このとき、各要素の断面は仮定に従って平面を保持し、左側支点上の断面は変形後に鉛直軸から時計回りに θ_{s0} だけ回転するものとする． θ_{s0} はピン支点のようにはり端断面の軸方向変位が拘束されていない場合は未知数、固定端のように軸方向変位が拘束されている場合は0となる．未知数の場合には、はりの鉛直方向変位に対する境界条件から θ_{s0} が求められる．各要素は断面に発生するせん断力に応じたせん断ひずみを生じ、これに伴いせん断変形によるたわみ v_s が生ずることになる．

同図において、左端から n 個目の微小要素のせん断変形による鉛直方向の変位 v_{sn} は次式で表される．

$$v_{sn} = (\theta_{s0} + \gamma_1)\Delta x_1 + (\theta_{s0} + \gamma_2)\Delta x_2 + \dots + (\theta_{s0} + \gamma_n)\Delta x_n$$

$$= \sum_{i=1}^n (\theta_{s0} + \gamma_i)\Delta x_i \tag{1}$$

ここに、 γ_i : 微小要素 i に生ずるせん断ひずみ (せん断変形角) , Δx_i : 微小要素 i の長さである．

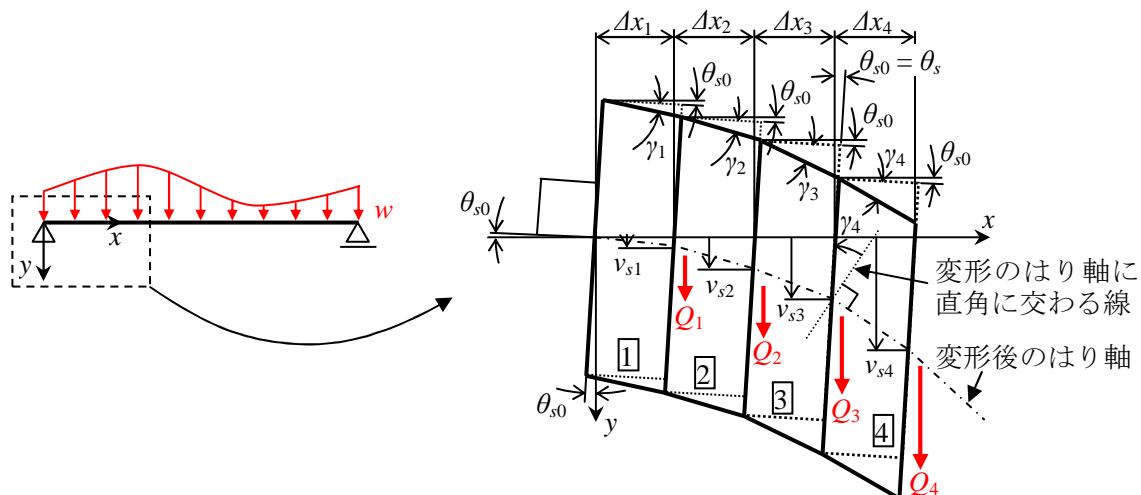


図-4 単純ばり支点上の微小要素に生ずるせん断変形

式(1)に対して $\Delta x_i \rightarrow 0$ の極限をとると、任意点 x に生ずる鉛直方向の変位 v_s は次式で表される。

$$v_s = \int_0^x (\theta_{s0} + \gamma) dx \quad (2)$$


せん断力 Q とせん断ひずみ γ の関係は以下で表される。

$$\gamma = \frac{\kappa Q}{GA} \quad (3)$$

ここに、 κ : せん断修正係数、 G : せん断弾性係数、および A : 断面積である。

式(3)を式(2)に代入すると次式を得る。

$$v_s = \int_0^x \left(\theta_{s0} + \frac{\kappa Q}{GA} \right) dx \quad (4)$$

静定ばりでは、 Q が力のつり合い条件から求められるので、別途 θ_{s0} が求めれば、任意点のせん断たわみ v_s が式(4)から求められる。なお、-4 は正のせん断力が生ずる場合を想定しており、任意点の断面は変形後のはり軸に直角に交わる線から γ_i だけ反時計回りに回転している。また、任意点において鉛直軸から時計回りに定義した断面回転角 θ_s は左側支点上断面の θ_{s0} に等しい。

5. せん断変形計算法の適用例

本章では、第4章で説明した手法の実用問題への適用例として、等断面・等剛性（曲げ剛性 EI 、せん断剛性 GA/κ ははり軸方向に一定）を有する静定ばりのせん断変形の計算例を示す。

5. 1 集中荷重の作用する単純ばり

表-2 の(1)に示すように、左端から a だけ離れた任意点に集中荷重 P の作用する支間長 L の単純ばりのせん断力は次式で表される。

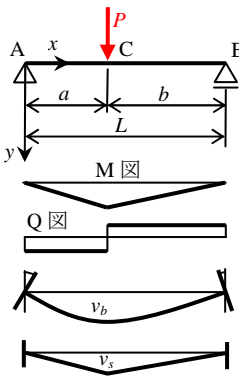
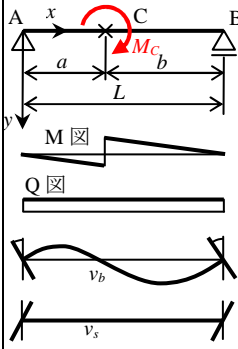

$$Q = \begin{cases} bP/L & (0 \leq x \leq a) \\ -aP/L & (a \leq x \leq L) \end{cases} \quad (5)_{1,2}$$

本例は単純ばりであるため、式(4)の θ_{s0} は未知数となる。右側の支点 B では鉛直方向の変位 v_{sR} が拘束されているため、 $x=L$ において $v_s = 0$ となる条件から θ_{s0} を決定する。即ち、式(4)に式(5)を代入して軸方向に積分することによって θ_{s0} が求められる。

$$\begin{aligned} v_{sR} &= \int_0^a \left(\theta_{s0} + \frac{\kappa bP}{GAL} \right) dx + \int_a^L \left(\theta_{s0} - \frac{\kappa aP}{GAL} \right) dx \\ &= \left(\theta_{s0} + \frac{\kappa bP}{GAL} \right) [x]_0^a + \left(\theta_{s0} - \frac{\kappa aP}{GAL} \right) [x]_a^L \\ &= \left(\theta_{s0} + \frac{\kappa bP}{GAL} \right) a + \left(\theta_{s0} - \frac{\kappa aP}{GAL} \right) (L-a) = \left(\theta_{s0} + \frac{\kappa bP}{GAL} \right) a + \left(\theta_{s0} - \frac{\kappa aP}{GAL} \right) b \\ &= (a+b)\theta_{s0} + \frac{\kappa P}{GAL} (ab - ab) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

よって、式(6)より $\theta_{s0} = 0$ となり、左、右端においてもせん断変形による断面の回転は生じず、 $\theta_{sL} = \theta_{sR} = 0$ であることがわかる。任意点のせん断たわみは、 $\theta_{s0} = 0$ と式(5)を式(4)に代入することによって、

表-2 代表的な静定ばりの曲げ，せん断たわみとせん断変形による端面の回転角

(1) 集中荷重を受ける単純ばり		(2) 集中モーメントを受ける単純ばり	
断面力図，変形図	たわみと回転角	断面力図，変形図	たわみと回転角
	$0 \leq x \leq a$ について $v_b = \frac{Pa^2b^2}{6LEI} \left(\frac{2x}{a} + \frac{x}{b} - \frac{x^3}{a^2b} \right)$ $v_s = \frac{\kappa Pbx}{GAL}$ $\theta_{sL} = 0$ $a \leq x \leq L$ について $v_b = \frac{Pa^2b^2}{6LEI} \left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{L-x}{b} \\ + \frac{L-x}{a} \\ - \frac{(L-x)^3}{ab^2} \end{array} \right\}$ $v_s = \frac{\kappa Pa}{GAL} (L-x)$ $\theta_{sR} = 0$		$0 \leq x \leq a$ について $v_b = -\frac{M_c L^2}{6EI} \frac{x}{L} \left\{ \begin{array}{l} 1 - 3 \left(\frac{b}{L} \right)^2 \\ - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \end{array} \right\}$ $v_s = 0$ $a \leq x \leq L$ について $v_b = \frac{M_c L^2}{6EI} \frac{L-x}{L} \left\{ \begin{array}{l} 1 - 3 \left(\frac{a}{L} \right)^2 \\ - \left(\frac{L-x}{L} \right)^2 \end{array} \right\}$ $v_s = 0$ $\theta_{sR} = \frac{\kappa M_c}{GAL}$
<p>注</p> <p>1) v_b は曲げたわみ，v_s はせん断たわみ，θ_{sR}，θ_{sL} はそれぞれ左端，右端のせん断変形による断面の回転角を表す。</p> <p>2) 変形図において，はり両端のはり軸線に交差する直線（）は，両端断面の回転状況を模式的に示している。</p>			

$$v_s = \begin{cases} \int_0^x \frac{\kappa b P}{GAL} dx & (0 \leq x \leq a) \\ \int_0^a \frac{\kappa b P}{GAL} dx + \int_a^x \left(-\frac{\kappa a P}{GAL} \right) dx & (a \leq x \leq L) \end{cases} \quad (7)_{1,2}$$

式(7)を積分すると，せん断たわみは

$$v_s = \begin{cases} \frac{\kappa b P x}{GAL} & (0 \leq x \leq a) \\ \frac{\kappa a P}{GAL} (L-x) & (a \leq x \leq L) \end{cases} \quad (8)_{1,2}$$



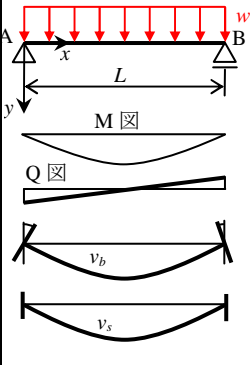
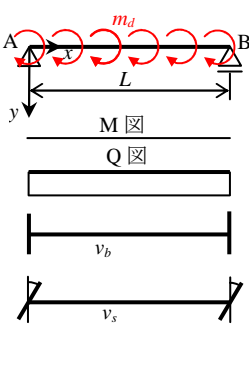
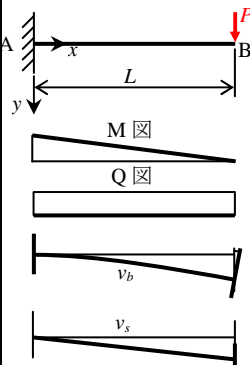
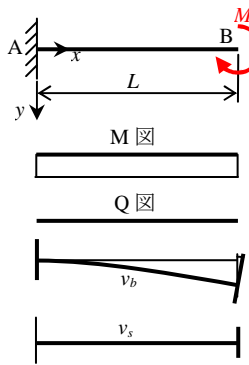
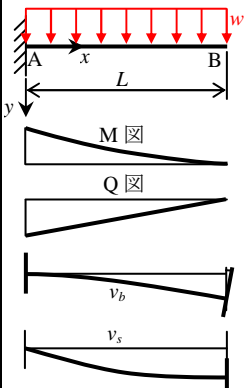
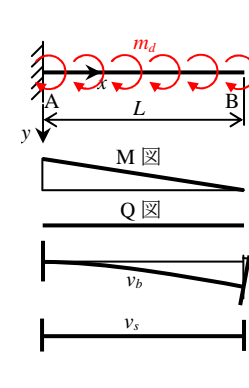

また，せん断変形に伴う任意点の断面の回転角 θ_s は，-4 で説明したように，左端の断面の回転角 θ_{s0} に等しくなることから，本例では，-2(c) に示すように，はりせん断変形によっても断面に回転は生じず，全長にわたって鉛直を保つ。

表-2 代表的な静定ばりの曲げ，せん断たわみとせん断変形による端面の回転角（続き）

(3) 等分布荷重を受ける単純ばり		(4) 等分布モーメントを受ける単純ばり	
断面力図，変形図	たわみと回転角	断面力図，変形図	たわみと回転角
	$0 \leq x \leq L$ について $v_b = \frac{wL^4}{24EI} \left\{ \frac{x}{L} - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)^4 \right\}$ $v_s = \frac{\kappa wx}{2GA} (L-x)$ $\theta_{sL} = \theta_{sR} = 0$		$0 \leq x \leq L$ について $v_b = 0$ $v_s = 0$ $\theta_{s0} = \theta_{sL} = \theta_{sR} = \frac{\kappa m_d}{GA}$
(5) 自由端に集中荷重を受ける単純ばり		(6) 自由端に集中モーメントを受ける単純ばり	
	$0 \leq x \leq L$ について $v_b = \frac{PL^3}{6EI} \left(\frac{x}{L}\right)^2 \left(3 - \frac{x}{L}\right)$ $v_s = \frac{\kappa P}{GA} x$ $\theta_{sL} = \theta_{sR} = 0$		$0 \leq x \leq L$ について $v_b = \frac{M_c x^2}{2EI}$ $v_s = 0$ $\theta_{sL} = \theta_{sR} = 0$
(7) 等分布荷重が満載された片持ちばり		(8) 等分布モーメントが満載された片持ちばり	
	$0 \leq x \leq L$ について $v_b = \frac{wL^2 x^2}{24EI} \left\{ 6 - \frac{4x}{L} + \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right\}$ $v_s = \frac{\kappa w}{2GA} (2L-x)x$ $\theta_{sL} = \theta_{sR} = 0$		$v_b = -\frac{m_d}{6EI} (x^3 - 3Lx^2)$ $v_s = 0$ $\theta_{sL} = \theta_{sR} = 0$
注			
<p>1) v_b は曲げたわみ，v_s はせん断たわみ，θ_{sR}，θ_{sL} はそれぞれ左端，右端のせん断変形による断面の回転角を表す。</p> <p>2) 変形図において，はり両端のはり軸線に交差する直線（）は，両端断面の回転状況を模式的に示している。</p>			

5. 2 集中モーメントの作用する単純ばり

表-2 の(2)に示すように，集中モーメント M_c を受ける単純ばりのせん断力は次式で表される。

$$Q = -M_c/L \quad (0 \leq x \leq L) \tag{9}$$

θ_{s0} を決定するため、右端の支点上でせん断たわみが 0 となる条件を用いる。即ち、式(4)に式(9)を代入して軸方向に積分することによって θ_{s0} を求める。

$$\begin{aligned} v_s &= \int_0^L \left(\theta_{s0} - \frac{\kappa M_c}{GAL} \right) dx = \left(\theta_{s0} - \frac{\kappa M_c}{GAL} \right) [x]_0^L \\ &= \left(\theta_{s0} - \frac{\kappa M_c}{GAL} \right) L = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)を θ_{s0} について解けば、 $\theta_{s0} = \kappa M_c / (GAL)$ となる。これと式(9)を式(4)に代入して、0 からはりの任意点 x まで積分すると、

$$v_s = \int_0^x \left(\frac{\kappa M_c}{GAL} - \frac{\kappa M_c}{GAL} \right) dx = 0 \quad (0 \leq x \leq L) \quad (11)$$

よって、式(11)より、はり全長にわたってせん断たわみを生じないことがわかる。しかし、[図-4](#) で説明したように、左側の支点上には、断面の回転角 $\theta_{s0} = \theta_{sL} = \kappa M_c / (GAL)$ が生じ、任意点の断面の回転角は全て θ_{s0} に等しくなることから、本例では、[図-2\(g\)](#) に示すように、はりの断面は全長にわたって一定の回転角 $\theta_{s0} = \kappa M_c / (GAL)$ が生ずる。

5. 3 等分布モーメントが満載された単純ばり

[表-2](#) の(4)に示すように、等分布モーメント m_d が満載された単純ばりのせん断力は次式で表される。

$$Q = -m_d \quad (0 \leq x \leq L) \quad (12)$$

右側支点ではせん断たわみ v_{s0} は 0 であるから、

$$\begin{aligned} v_s &= \int_0^L \left(\theta_{s0} - \frac{\kappa m_d}{GA} \right) dx = \left(\theta_{s0} - \frac{\kappa m_d}{GA} \right) [x]_0^L \\ &= \left(\theta_{s0} - \frac{\kappa m_d}{GA} \right) L = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)より $\theta_{s0} = \kappa m_d / (GA)$ である。よって任意点のせん断たわみは、

$$v_s = \int_0^x \left(\frac{\kappa m_d}{GA} - \frac{\kappa m_d}{GA} \right) dx = 0 \quad (0 \leq x \leq L) \quad (14)$$

即ち、[表-2](#) の(2) (4. 2 節) と同様に、はり全長にわたってせん断たわみは生じず、断面の回転角 θ_{s0} が一定となる。はり側面は当初の長方形から平行四辺形に変形する。

5. 4 片持ちばり

左端が固定支持された片持ちりでは、固定端に断面の回転が生じないため $\theta_{s0} = 0$ となる。したがって、式(5)より、片持ちりのせん断たわみの式は次のようになる。

$$v_s = \int_0^x \frac{\kappa Q}{GA} dx \quad (15)$$

式(15)の実用問題への適用例として、例えば、[表-2](#) の(5)に示すように、片持ちばりの自由端に集中荷重 P が作用する片持ちばりのせん断たわみについて求めてみる。同はりのせん断力は次式で表される。

$$Q = P \quad (0 \leq x \leq L) \quad (16)$$

式(16)を式(15)へ代入して、はりの軸方向に任意点 x まで積分すると、

$$v_s = \int_0^x \frac{\kappa P}{GA} dx = \frac{\kappa P}{GA} [x]_0^x = \frac{\kappa P x}{GA} \tag{17}$$

よって、自由端に集中荷重を受ける片持ちばりのせん断たわみは線形分布となる。しかし、固定端では断面の軸方向の伸縮変形は生じないため、断面の回転も生じず、結果的にはりの軸方向にわたって断面の回転角は0となる。

このほかの荷重、境界条件を有する静定ばりのせん断たわみについても、同様に式(4)を用いて求めることができる。一方、曲げ変形によるたわみやたわみ角に関しては、従来のせん断変形を無視したはり理論によって求められるが、代表的な静定ばりのそれらについては、例えば文献 13)や 14)に与えられている。これらの結果を表-2にまとめる。また、単純ばりの任意点に集中荷重もしくは集中モーメントが作用する場合、片持ちばりの自由端にそれらが作用する場合について、曲げたわみ v_b 、せん断たわみ v_s 、合計たわみ v 、曲げによるたわみ角 dv_b/dx 、せん断によるたわみ角 dv_s/dx 、総たわみ角 dv/dx 、曲げによる断面の回転角 θ_b 、せん断による断面の回転角 θ_s 、ならびに断面の総回転角 θ の発生の有無の関係を表-3に整理して示す。

6. 単純ばりの全たわみに及ぼすせん断変形の影響

静定ばりの全たわみに及ぼすせん断たわみの影響について示すため、一例として、図-5に示すように、支間中央に集中荷重を受ける単純ばりについて、支間中央の全たわみに占めるせん断たわみの割合 v_s/v を求めてみる。

図-5に示す単純ばりの支間中央における曲げたわみ v_b とせん断たわみ v_s は、それぞれ表-2の(1)に掲げられている式に、 $a = b = L/2$ および $x = L/2$ を代入することに次のように表される。

表-3 集中荷重、モーメントを受ける単純、片持ちばりのたわみ、たわみ角と断面の回転角

はりの区分		単純ばり		片持ちばり	
荷重の区分		集中荷重	集中モーメント	集中荷重	集中モーメント
曲げ	たわみ v_b	発生	発生	発生	発生
	たわみ角 dv_b/dx	発生	発生	発生	発生
	断面回転角 θ_b	発生 (= dv_b/dx)	発生 (= dv_b/dx)	発生 (= dv_b/dx)	発生 (= dv_b/dx)
せん断	たわみ v_s	発生	発生しない	発生	発生しない
	たわみ角 dv_s/dx	発生	発生しない	発生	発生しない
	断面回転角 θ_s	発生しない	発生	発生しない	発生しない
合計	たわみ v	発生 (= $v_b + v_s$)	発生 (= v_b)	発生 (= $v_b + v_s$)	発生 (= v_b)
	たわみ角 dv/dx	発生 (= $dv_b/dx + dv_s/dx$)	発生 (= dv_b/dx)	発生 (= $dv_b/dx + dv_s/dx$)	発生 (= dv_b/dx)
	断面回転角 θ	発生 (= dv_b/dx)	発生 (= $dv_b/dx + \theta_s$)	発生 (= dv_b/dx)	発生 (= dv_b/dx)

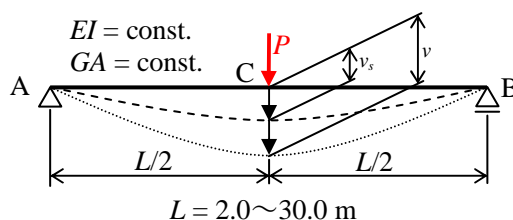


図-5 集中荷重を受ける単純ばり

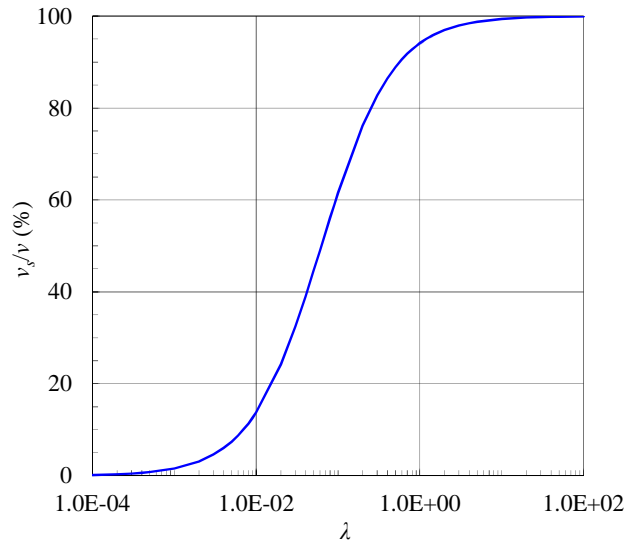


図-6 せん断たわみが全たわみに占める割合とせん断パラメータの関係

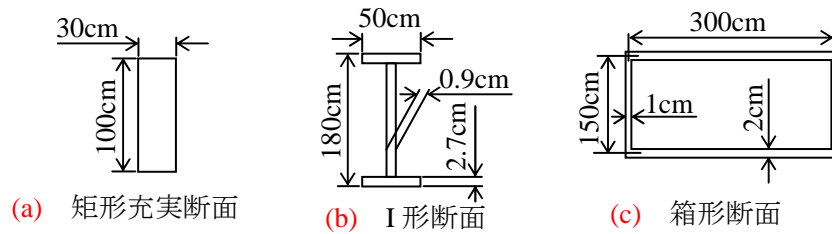


図-7 単純ばりの断面

$$v_b = \frac{PL^3}{48EI} \tag{18}$$

$$v_s = \frac{\kappa PL}{4GA} \tag{19}$$

式(18)と(19)を足し合わせたものが全たわみ v であり、次式で表される。

$$v = v_b + v_s = \frac{PL^3}{48EI} + \frac{\kappa PL}{4GA} = \frac{PL^3}{48EI} \left(1 + 16 \frac{\kappa EI}{GAL^2} \right) \tag{20}$$

ここで、はりの曲げに伴う変形に及ぼすせん断変形の影響を表す尺度として、次式で表されるせん断パラメータ λ を定義する。

$$\lambda = \frac{\kappa EI}{GAL^2} \tag{21}$$

式(18)と(21)を式(20)に代入して、両辺を無次元化すると、

$$\frac{v_b}{v} = \frac{1}{1+16\lambda} \tag{22}$$

式(20)より、

$$v_b = v - v_s \tag{23}$$

式(23)を式(22)に代入して、 v_s/v について解けば次式を得る。

$$\frac{v_s}{v} = \frac{16\lambda}{1+16\lambda} \tag{24}$$

式(24)で表される、支間中央の全たわみに占めるせん断たわみの割合 v_s/v とせん断パラメータ λ の関

表-4 単純ばりの断面諸量とせん断修正係数

断面形状	矩形充実	I形	箱形
高さ h (cm)	100.0	185.4	152.0
断面積 A (cm ²)	3,000	432	1,500
断面二次モーメント I (cm ⁴)	2,500,000	2,690,666	7,313,200
断面回転半径 r (cm)	28.87	78.92	69.82
せん断修正係数 κ	1.50	2.67	5.00
弾性係数 E (N/mm ²)	200,000		
せん断弾性係数 G (N/mm ²)	77,000		

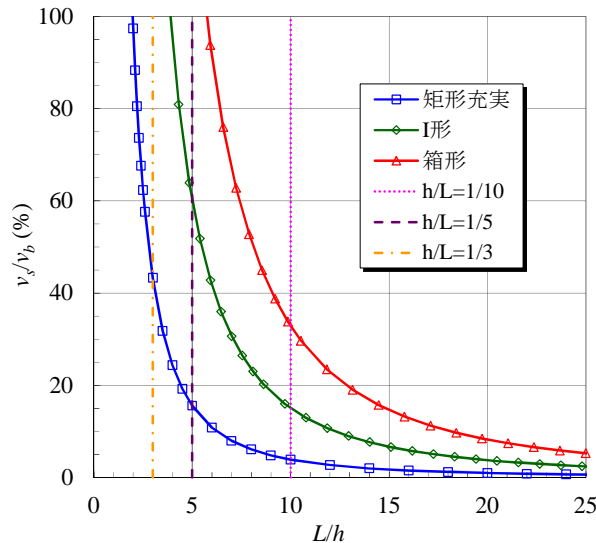


図-8 たわみの比 v_s/v_b とはり高さに対する支間長の比 L/h の関係

係を図-6 に示す。同図より、せん断パラメータの増加につれて、全たわみに占めるせん断たわみも増大することがわかる。

せん断変形の影響はせん断パラメータを用いて統一的に評価できるが、無次元パラメータのため必ずしも直感的にせん断変形の影響が把握できない。そこで、はりの支間長 L と高さ h の関係がせん断たわみに及ぼす影響についてさらに直感的に示すため、図-5 に示す単純ばりが図-7 に示す3種類の断面で構成されている場合について、支間中央のせん断たわみと曲げたわみの比 v_s/v_b と L/h の関係について図-8 に示す。同図中には、それぞれ $h/L = 1/10$, $1/5$ ならびに $1/3$ の縦線も併せて示した。各断面の断面諸量とせん断修正係数 κ は表-4 に示すとおりである。 κ については、文献 15) に従って、Timoshenko のはり理論で一般的に用いられる断面内の曲げに伴う最大せん断応力と平均せん断応力の比として評価した。 κ の実用的な計算方法として、I形断面、箱形断面については道示 II¹⁶⁾、図-解 11.2.1 を参考に、ウェブに均等なせん断応力が分布するとして、全断面積を腹板の断面積で除して評価した。

図-8 より、はり断面の形状に関わらず、 L/h の増大につれて v_s/v_b が減少することは言うまでもないが、矩形充実断面に注目すると、1章で述べたように、 $h/L = 1/10$ のとき v_s/v_b は 3.9% であり、これよりも h/L が小さくなるにつれて v_s/v_b は増加している。 $h/L = 1/5$ では v_s/v_b は 15.6% に達し、 $h/L = 1/3$ では v_s/v_b は 43.3% とほぼ曲げたわみとせん断たわみが同程度になっていることが確認できる。ここで具体例として取り上げた I 形断面、箱形断面は、充実断面に比べて同じ L/h に対して顕著にせん断変形の影響が生じる結果となったが一般論ではないことに注意されたい。

7. せん断変形を考慮したはり理論の変位自由度

本資料の最後に、せん断変形を考慮したはり理論における変位自由度に関して補足する。誘導は後編で行うが、Timoshenko (チモシェンコ) の仮定に従うはり理論における曲げの微分方程式 (弾性曲線方程式) は次式で表される。

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = p - \kappa \frac{EI}{GA} \frac{d^2 p}{dx^2} \quad (25)$$

ここに、 E : 弾性係数, I : 断面二次モーメント, v : はりのたわみ, x : はりの軸方向に沿った直線座標, p : 等分布荷重, κ : せん断修正係数, G : せん断弾性係数, および A : 断面積である。

これに対して、せん断変形の影響を考慮しない、一般的な Bernoulli-Euler (ベルヌーイ=オイラー) の仮定に従ったはり理論における曲げの微分方程式 (弾性曲線方程式) は次式で表される。

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = p \quad (26)$$

式(25)と(26)の比較から明らかなように、はり部材の曲げ問題においてせん断変形の影響を考慮しても取り扱う変位はたわみ v のみであり、変位の自由度はせん断変形を無視する場合と変わらないことがわかる。これは、薄肉開断面部材のそりねじりに関する微分方程式に2次せん断変形 (そりモーメントの変化に対応する2次せん断流の影響) を考慮する場合と同様である。これについては、例えば文献 17) 等を参照されたい。

【参考文献】

- 1) 小松定夫, 西村宣男: 平行弦トラス橋の立体振動特性について, 土木学会論文報告集, 第 297 号, pp.21-36, 1980.
- 2) 小松定夫, 西村宣男: 長大吊橋の固有振動に対する吊構造のせん断変形の影響, 土木学会論文報告集, 第 317 号, pp.29-41, 1983.
- 3) 小松定夫: 構造解析学 I, 丸善, 1982.
- 4) 小西一郎, 横尾義貫, 成岡昌夫: 構造力学, 第 3 版, 丸善, 1974.
- 5) 藤谷義信: コンピュータによる極限解析法シリーズ 5 薄肉はり構造解析, 培風館, 1990.
- 6) 関西道路橋研究会 道路橋調査研究委員会: 照査のための構造力学, 1998.
- 7) Timoshenko, S. P.: Strength of material, D. Van Nostrand, 1930.
- 8) Vlasov V.Z.: Thin-Walled Elastic Beams, U.S. Department of Commerce, PST Catalogue, N0.428, 1959. (奥村敏恵 他訳: 薄肉弾性ばりの理論, 技報堂, 1967.)
- 9) 西野文雄, 長谷川彰夫: 土木学会編 新体系土木工学 7 構造物の弾性解析, 技報堂出版, 1983.
- 10) 岩崎英治, 林 正, 中村隆広: 拡張 Timoshenko はり要素による細長い部材の非線形解析, 構造工学論文集, Vol.42A, pp263-274, 1996.
- 11) 奥村 徹, 後藤芳顕: せん断変形が卓越する鋼製ラーメン橋脚の Pushover 解析への Timoshenko はり要素の適用性, 第 4 回鋼構造物の非線形数値解析と耐震設計への応用に関する論文集, 土木学会, Vol.4, pp135-143, 2002.
- 12) 加藤久人, 西村宣男: 波形鋼板ウェブを有する連続桁および斜張橋の実用解析法, 土木学会論文集, No.731/I-63, pp.231-245, 2003.
- 13) (社) 日本橋梁建設協会: デザインデータブック, 2006.

- 14) 土木学会：構造力学公式集，1995.
- 15) 稼農知徳，薄木征三，堀江 保：せん断変形を考慮した薄肉断面直線ばりの理論，土木学会論文報告集，第 282 号，pp.1-13，1979.
- 16) (社)日本道路協会：道路橋示方書・同解説 II 鋼橋編，2012.
- 17) 佐伯 昇：二次せん断変形を考慮した曲げねじり理論と数値計算，土木学会論文報告集，第 209 号，pp.27-36，1973.