

2 被食者 - 1 捕食者系の挙動

松下通紀*

The Population Dynamics of a Two-Prey and One-Predator System

Michinori MATSUSHITA

ABSTRACT

The population dynamics of a two-prey and one-predator system is investigated by means of stability analysis of the equilibrium point of the governing differential equations. It has been shown that the switching mechanism of predation, which means that the predatory rate diminishes with low population density of the prey, stabilizes the coexistence of the three species. Otherwise, one of the prey species is always led to extinction.

KEY WORDS : Population Dynamics, Prey-Predator System, Switching Predation

1. はじめに

すべての動物は、生きるためのエネルギーと成長のための物質を餌となる他の生物より得ている。このように他の生物を捕らえて食う方を捕食者、食われる方を被食者とよぶ。被食者が豊富にあると捕食者の個体数は増加する。その結果、被食者を消費しすぎようになり、ついには被食者が減少して、捕食者自身も減少し始めることになる。捕食者の個体数が充分に少なくなると被食者の個体数が増殖によって回復してくる。このような過程のために、被食者と捕食者の個体数には位相差のある振動が生じる傾向がある。この現象に対する古典的数理モデルが次のロトカ - ボルテラ捕食系である。

$$\frac{dx}{dt} = r_1x - axy \quad (1a)$$

$$\frac{dy}{dt} = -r_2y + bxy \quad (1b)$$

ここで x, y はそれぞれ被食者と捕食者の個体数を表す。 $r_1 (> 0)$ は被食者の内的自然増加率である。捕食の速度は被食者と捕食者の出会いの数に比例すると仮定して axy ($a > 0$) とする。捕食者は一定の比率 $r_2 (> 0)$

で死亡し、捕食した餌の量に比例した速度 bxy ($b > 0$) で増加する。式 (1) の系には、固有値が純虚数の中立安定な共存平衡点 $(r_2/b, r_1/a)$ とリアプノフ関数

$$V(x, y) = -r_2 \log x + bx - r_1 \log y + ay$$

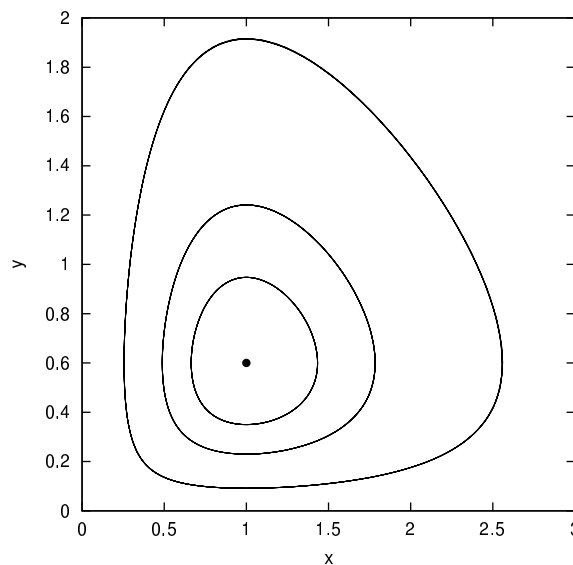


図 1 ロトカ - ボルテラ捕食系の相平面軌道 ($r_1 = 0.6, r_2 = 1, a = 1, b = 1$)

*機械工学科

が存在し、 V の等高線が解軌道となる。また、解軌道は図 1 に示すような共存平衡点を回る閉曲線で、式 (1) の解は周期解となることが知られている。^{1),2)}

本研究は、上記のモデルを拡張した 2 種の被食者と 1 種の捕食者からなる 3 種系の挙動を調べようとするものである。また、捕食率は式 (1) の個体数の積に比例する型と併せて、存在量の多い方の餌を比例関係以上に多く利用するスイッチング捕食²⁾ の効果についても比較検討する。

2. ロトカ - ボルテラ型の 2 被食者 - 1 捕食者系

2.1 基礎方程式と平衡点

1 被食者-1 捕食者系の挙動を記述する式 (1) を 2 被食者-1 捕食者系に拡張すれば次のようになる。

$$\frac{dx}{dt} = r_1x - axz \tag{2a}$$

$$\frac{dy}{dt} = r_2y - byz \tag{2b}$$

$$\frac{dz}{dt} = -r_3z + cxz + dyz \tag{2c}$$

ここで x, y は 2 種の被食者の個体数で、 z は捕食者の個体数である。この系の原点以外の平衡点は次の 2 点である。

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r_3}{c} \\ 0 \\ \frac{r_1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{r_3}{d} \\ \frac{r_2}{b} \end{pmatrix}$$

これらを平衡点 P, Q とよぶ。この系には 3 種共存平衡点は存在しない。ここでパラメータの間に

$$\frac{r_1}{a} > \frac{r_2}{b} \tag{3}$$

の関係を仮定する。これは被食者 y よりも x の方が多数の捕食者を維持できることを意味している。

2.2 平衡点の安定性解析と系の挙動

前節の平衡点の安定性を調べるために $x = x^* + u, y = y^* + v, z = z^* + w$ (u, v, w は微小量) として式 (2) を平衡点 (x^*, y^*, z^*) の回りで線形化して次の式を得る。³⁾

$$\frac{du}{dt} = (r_1 - az^*)u - ax^*w \tag{4a}$$

$$\frac{dv}{dt} = (r_2 - bz^*)v - by^*w \tag{4b}$$

$$\frac{dw}{dt} = cz^*u + dz^*v + (-r_3 + cx^* + dy^*)w \tag{4c}$$

平衡点 P においては式 (4) は次のようになる。

$$\frac{du}{dt} = -\frac{ar_3}{c}w \tag{5a}$$

$$\frac{dv}{dt} = \left(r_2 - \frac{br_1}{a}\right)v \tag{5b}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{cr_1}{a}u + \frac{dr_1}{a}v \tag{5c}$$

式 (5) の固有方程式は次のようになる。

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -\frac{ar_3}{c} \\ 0 & r_2 - \frac{br_1}{a} - \lambda & 0 \\ \frac{cr_1}{a} & \frac{dr_1}{a} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

式 (6) の解は

$$\lambda_1 = r_2 - \frac{b}{a}r_1 \quad \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{r_1r_3} i$$

となり、式 (3) より $\lambda_1 < 0$ となり安定である。

平衡点 Q においては式 (4) は次のようになる。

$$\frac{du}{dt} = \left(r_1 - \frac{ar_1}{b}\right)u \tag{7a}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{br_3}{d}w \tag{7b}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{cr_2}{b}u + \frac{dr_2}{b}v \tag{7c}$$

式 (7) の固有方程式は次のようになる。

$$\begin{vmatrix} r_1 - \frac{ar_2}{b} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -\frac{br_3}{d} \\ \frac{cr_2}{b} & \frac{dr_2}{b} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

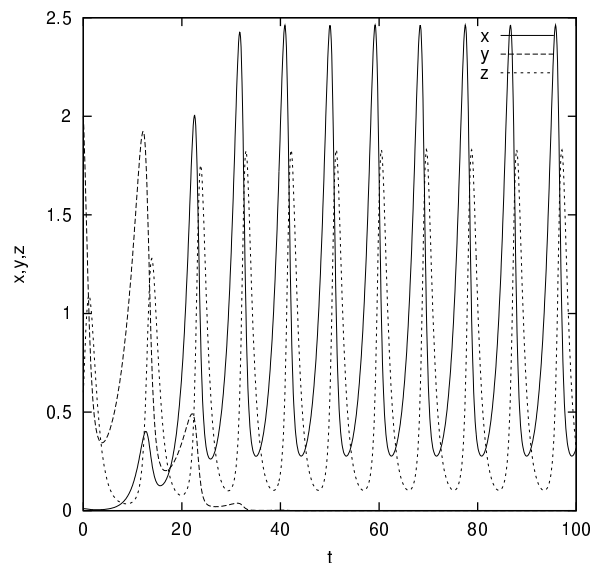


図 2 ロトカ - ボルテラ型 2 被食者 - 1 捕食者系の数値解 ($r_1 = 0.6, r_2 = 0.3, r_3 = 1, a = b = c = d = 1$)

