令和 2 年度　専攻科入学試験問題及び解答用紙（学力）

一般科目　数学

受験番号

1. 以下の問に答えよ．答えのみを空欄に記せ．

(1) 大人 6 人, 子ども 5 人の中から 4 人を選ぶとき, 大人も子どもも含まれる選び方は何通りあるか．

(1)	

(2) 円に内接する四角形 ABCD がある．$\mathrm{AB} = 8$, $\mathrm{BC} = 3$, $\mathrm{CD} = 5$, $\mathrm{DA} = 5$ であるとき, 線分 BD の長さを求めよ．

(2)	

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{2n} + \sin\frac{2\pi}{2n} + \cdots + \sin\frac{n\pi}{2n}\right)$ を求めよ．

(3)	

(4) カテナリー曲線 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $(0 \leqq x \leqq \log 2)$ の長さを求めよ．

(4)	

(5) 点 $\mathrm{A}(1, 1, 0)$ を通り, 直線 $\dfrac{x-6}{3} = y - 2 = \dfrac{1-z}{2}$ に垂直な平面の方程式を求めよ．

(5)	

(6) 方程式 $z^3 = 8i$ を解け．

(6)	

(7) P, Q を以下のように定め, P, Q は収束するものとする．

$$P = \sqrt{2 + 3\sqrt{2 + 3\sqrt{2 + 3\sqrt{2 + \cdots}}}},\quad Q = a + \cfrac{2}{a + \cfrac{2}{a + \cfrac{2}{a + \cfrac{2}{a + \cdots}}}}$$

$P = Q$ となるとき, a の値を求めよ．ただし, $a > 0$ とする．

(7)	

(8) 定数係数非斉次 2 階線形常微分方程式 $y'' - 4y' + 3y = \cos x$ に対して，すべての x の値で $|y| < 1$ を満たす特殊解 y を求めよ．

(8)	

令和2年度　専攻科入学試験問題及び解答用紙（学力）

一般科目　数学

受験番号	

2. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ を用いて，$\boldsymbol{y}(x)$ に関する微分方程式 $\dfrac{d\boldsymbol{y}(x)}{dx} = A\boldsymbol{y}(x)$ $\left(\text{ただし}, \boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \right)$ を行列 A の対角化を利用して以下の問に沿って求めよ．

(1) 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 と固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を求めよ．

[解答欄]

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を列ベクトルとする行列を $P = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ とする．$P^{-1}AP$ を求めよ．

[解答欄]

(3) $\boldsymbol{z}(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix} = P^{-1}\boldsymbol{y}(x)$ とするとき，$\boldsymbol{z}(x)$ に関する微分方程式を導き，$\boldsymbol{z}(x)$ の一般解を求めよ．

[解答欄]

(4) $\boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき，$\boldsymbol{y}(x)$ を求めよ．

[解答欄]

令和2年度　専攻科入学試験問題及び解答用紙（学力）

一般科目　数学

受験番号	

3. 領域 $D=\left\{(x,y)|x^2+y^2 \leqq 1\right\}$ において, 2 変数関数 $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ を考える. 次の問に答えよ.

(1) 領域 $\left\{(x,y)|x^2+y^2<1\right\}$ における $f(x,y)$ の極大値, 極小値とそれらを与える点 (x,y) を求めよ.
[解答欄]

(2) 単位円 $x^2+y^2=1$ 上での $f(x,y)$ の最大値, 最小値とそれらを与える点 (x,y) を求めよ.
[解答欄]

(3) 領域 D における $f(x,y)$ の最大値, 最小値とそれらを与える点 (x,y) を求めよ.
[解答欄]

令和２年度　専攻科入学試験問題及び解答用紙（学力）

一般科目　数学

受験番号

4. xy 平面上の領域 $D=\{(x,y)|x,y$ はすべての実数$\}$ に対して，
2 重積分 $I=\displaystyle\int\!\!\int_D e^{-(2x^2+2\sqrt{2}xy+3y^2)}dxdy$ の値を以下の問に沿って求めよ．

(1) 変数変換 $\sqrt{2}x+y=u,\ y=v$ を用いて，領域 D を uv 平面上の領域 E に書き換えよ．また，ヤコビアン $J_1=\dfrac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)}$ を求めよ．
[解答欄]

(2) 極座標変換 $u=\sqrt{2}r\cos\theta,\ v=r\sin\theta$ を用いて，領域 E を $r\theta$ 平面上の領域 F に書き換えよ．また，ヤコビアン $J_2=\dfrac{\partial(u,\,v)}{\partial(r,\,\theta)}$ を求めよ．
[解答欄]

(3) 2 重積分 I の値を求めよ．
[解答欄]