

補足資料① せん断変形を無視した3連モーメント公式

三好崇夫
加藤久人

1. 3連モーメント法の概要

図-1に示すように、連続ばり AE をその中間支点 B, C, D で切り離して単純ばり AB, BC, CD, DE に分離し、切断した支点到に未知数として曲げモーメント M_B , M_C , M_D を作用させた系を考える。

連続ばりの中間支点 B, C, D におけるたわみ角は実際には連続しており、図-1の各単純ばりが対応する連続ばりの各径間の変形と等価であるためには、隣り合う2つの単純ばりが共有する支点 B, C, D

の左右のたわみ角が等しいという変位の適合条件を満たさなければならない。3連モーメント法はこの条件を用いて単純ばりが共有する支点上の曲げモーメント M_B , M_C , M_D を求める手法である。ただし、同法は1つの支点到に2つまでの部材が交わる構造物に対してのみ適用可能である。

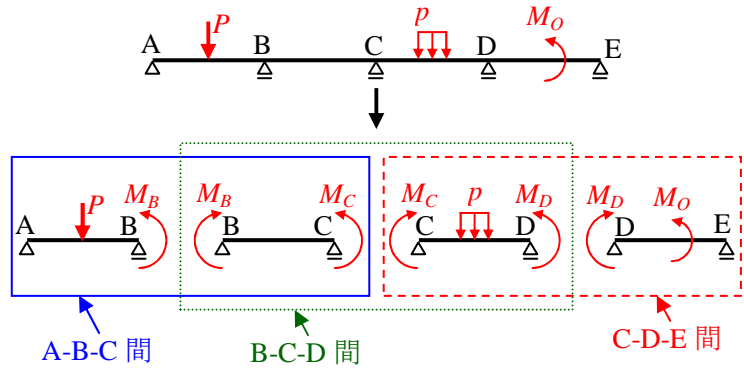


図-1 連続ばりの単純ばりへの分離

2. 3連モーメント公式の誘導

一般化された3連モーメント公式を誘導するため、図-2に示すように、支点到沈下を生じつつ外力の作用する連続ばりのうち、支点到 i を共有するはり i と i+1 が単純ばりに分離された状況を考える。

ただし、図-2において、

L_i, L_{i+1} : それぞれ、はり i と i+1 の支間に長

$\delta_{i-1}, \delta_i, \delta_{i+1}$: それぞれ、支点到 i-1, i, i+1 における支点到沈下量

β_i, β_{i+1} : それぞれ、はり i と i+1 の部材回転角 (剛体回転角)

M_{i-1}, M_i, M_{i+1} : それぞれ、支点到 i-1, i, i+1 での支点上曲げモーメント

θ_{mi}^l : 単純ばり i の支点到 i-1 上に作用する M_{i-1} , 支点到 i 上に作用する M_i によって、支点到 i の左側断面に生ずるたわみ角

θ_{mi}^r : 単純ばり i+1 の支点到 i 上に作用する M_i , 支点到 i+1 上に作用する M_{i+1} によって、支点到 i の右側断面に生ずるたわみ角

θ_{ei}^l : 単純ばり i 上に作用する外力によって、支点到 i の左側断面に生ずるたわみ角

θ_{ei}^r : 単純ばり i+1 上に作用する外力によって、支点到 i の右側断面に生ずるたわみ角

なお、3連モーメント法では、部材回転角やたわみ角は全て時計回りを正として取り扱う。

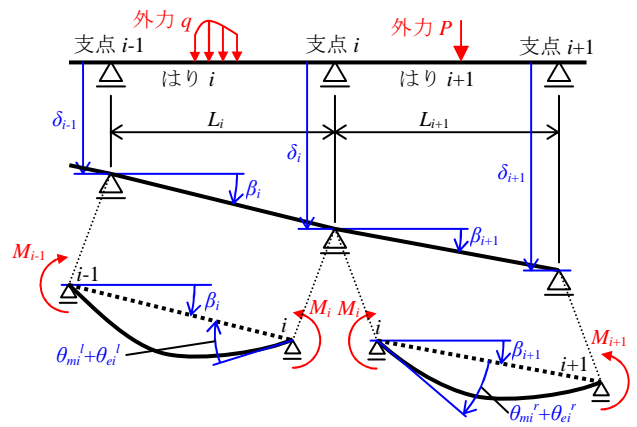


図-2 連続ばりから分離された単純ばり

以上の記号を用いると、**図-2**の支点*i*におけるたわみ角の連続条件式（変位の適合条件式）は、各々のたわみ角や部材回転角の重ね合わせとして次式で表される。

$$\beta_i + \theta_{mi}^l + \theta_{ei}^l = \beta_{i+1} + \theta_{mi}^r + \theta_{ei}^r \quad (1)$$

図-2より、はり*i*と*i+1*に生ずる部材回転角 β_i 、 β_{i+1} は、それぞれ次のように表される。

$$\beta_i = \tan^{-1} \left(\frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{L_i} \right) \cong \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{L_i} \quad (2)_1$$

$$\beta_{i+1} = \tan^{-1} \left(\frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{L_{i+1}} \right) \cong \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{L_{i+1}} \quad (2)_2$$

ただし、式(2)において、それぞれ $\delta_i - \delta_{i-1}$ 、 $\delta_{i+1} - \delta_i$ は L_i 、 L_{i+1} に比べて十分小さいものとする。

たわみ角 θ_{mi}^l 、 θ_{mi}^r は、**図-3**に示すように、いずれも支点上に集中モーメントが作用する支間長 L_i 、 L_{i+1} の単純ばりに生ずる支点*i*のたわみ角として、Mohr（モール）の弾性荷重法や単位荷重法などを用いて、それぞれ次のように求められる。詳細な誘導方法については、例えば文献 1), 2)を参照されたい。

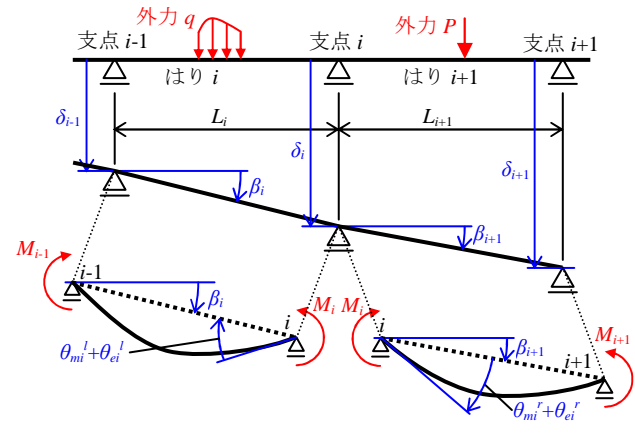


図-2 連続ばりから分離された単純ばり（再掲）

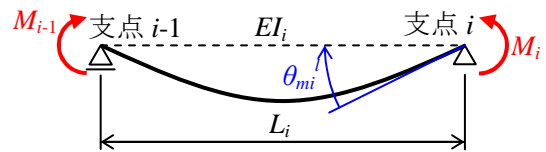


図-3 支点上モーメント M_{i-1} 、 M_i によって単純ばり*i*の支点*i*の左側断面に生ずるたわみ角 θ_{mi}^l

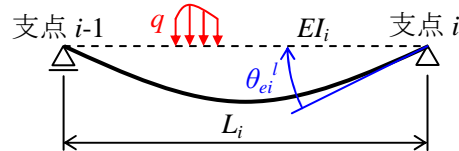


図-4 外力によって、単純ばり*i*の支点*i*の左側断面に生ずるたわみ角 θ_{ei}^l

$$\theta_{mi}^l = -\frac{M_{i-1}L_i}{6EI_i} - \frac{M_iL_i}{3EI_i} \quad (3)_1$$

$$\theta_{mi}^r = \frac{M_iL_{i+1}}{3EI_{i+1}} + \frac{M_{i+1}L_{i+1}}{6EI_{i+1}} \quad (3)_2$$

ただし、連続ばりの弾性係数は E 、はり*i*、*i+1*の断面二次モーメントはそれぞれ I_i 、 I_{i+1} とする。

たわみ角 θ_{ei}^l 、 θ_{ei}^r は、**図-4**に示すように、いずれも支間に集中荷重や分布荷重などの外力が作用する支間長 L_i 、 L_{i+1} の単純ばりに生ずる支点*i*のたわみ角として、Mohrの弾性荷重法や単位荷重法などを用いて求められる。ここでは、一般化された式を導くため、それらを具体的に数式表示することは避ける。

式(2)および(3)を式(1)に代入して整理すると、次のように3連モーメント公式が導ける。

$$\frac{L_i}{I_i} M_{i-1} + 2 \left(\frac{L_i}{I_i} + \frac{L_{i+1}}{I_{i+1}} \right) M_i + \frac{L_{i+1}}{I_{i+1}} M_{i+1} = 6E(\theta_{ei}^l - \theta_{ei}^r) + 6E(\beta_i - \beta_{i+1}) \quad (4)$$

3. 3連モーメント公式の適用方法

n 個の支点がヒンジまたはローラー支持された、 $(n-1)$ 径間連続ばりに対しては、 $(n-1)$ 個の3連モーメント式を隣接する2径間ごとに適用し、両端支点を除く中間の $(n-2)$ 個の支点上の曲げモーメント

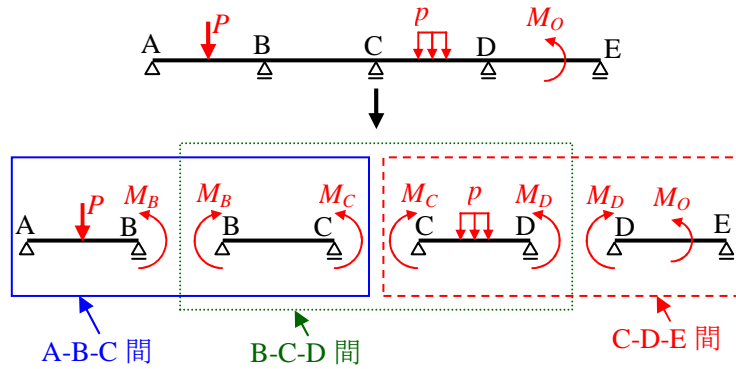


図-1 連続ばりの単純ばりへの分離（再掲）

を未知数とする連立方程式を立てることによって、これらの支点上曲げモーメントが求められる。なお、両端支点上の曲げモーメントは、支点上におけるモーメントとの釣り合い条件から、外力モーメントの作用がなければ0、作用があれば既知数となる。

図-1の例で等支間長 L 、一定剛性 EI で、支点上沈下がないもの ($\beta_{AB} = \beta_{BC} = \beta_{CD} = \beta_{DE} = 0$) と仮定し、両端支点上 A, E における支点上曲げモーメント M_A と M_E が支点上におけるモーメントの釣り合い条件から0になることを考慮すれば、A-B-C間、B-C-D間とC-D-E間に対して適用した3連モーメント公式はそれぞれ次のように表される。

A-B-C間について、(単純ばり AB の支点上 B に、集中荷重 P によって生ずるたわみ角を θ_{eb}^l 、また、単純ばり BC には外力の作用はないから、同様の支点上 B には外力によるたわみ角は生じないため $\theta_{eb}^r = 0$ を考慮すると)

$$2\left(\frac{L}{I} + \frac{L}{I}\right)M_B + \frac{L}{I}M_C = 6E\theta_{eb}^l \tag{5}$$

B-C-D間について、(単純ばり BC には外力の作用はないから、同様の支点上 C には外力によるたわみ角は生じないため $\theta_{ec}^l = 0$ 、単純ばり CD の支点上 C に分布荷重 p によって生ずるたわみ角 θ_{ec}^r を考慮すると)

$$\frac{L}{I}M_B + 2\left(\frac{L}{I} + \frac{L}{I}\right)M_C + \frac{L}{I}M_D = -6E\theta_{ec}^r \tag{6}$$

C-D-E間について、(単純ばり CD の支点上 D に分布荷重 p によって生ずるたわみ角を θ_{ed}^l 、単純ばり DE の支点上 D に、集中モーメント M_O によって生ずるたわみ角 θ_{ed}^r を考慮すると)

$$\frac{L}{I}M_C + 2\left(\frac{L}{I} + \frac{L}{I}\right)M_D = 6E(\theta_{ed}^l - \theta_{ed}^r) \tag{7}$$

式(5)~(7)は、支点上 B, C と D の支点上曲げモーメント M_B , M_C と M_D を未知数とする連立一次方程式であり、それを解くことによって M_B , M_C と M_D が求められる。さらに、それらを支点上に作用する集中モーメントとして、図-1に示す各単純ばりに作用させると、単純ばりの反力と断面力が求められる。中間支点上 B~D に関しては各単純ばりの支点上反力を足し合わせたものが連続ばりの支点上反力となる。

3連モーメント法はピン、ローラー支点上からなる連続ばりを基本としているが、固定支点を有するはりに対しても次のような処理を行うことにより適用できる。例えば、図-5に示すように C 点が固定支持されている場合には、同点よりも右側に無限大の断面二次モーメント I_0 を持つ仮想ばりを導入することによって対応できる。

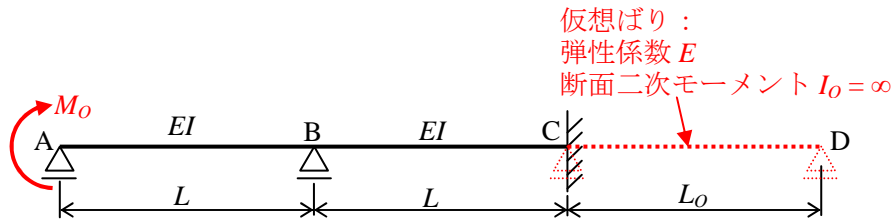


図-5 3連モーメント法における固定端のモデル化

この構造に対する3連モーメント式として、次の2式が得られる。

A-B-C 間について、(支点 A に作用する時計回りの集中モーメント M_0 を力の釣り合いから支点上モーメント $M_A = M_0$ と断面力として扱う代わりに、 M_0 によって B 点の左断面に生ずるたわみ角を $\theta_{eB}^l = 0$ と考え、(M_0 を分離された単純ばり AB の支点 A 上に作用する外力モーメントと考えて、それによって支点 B に生ずるたわみ角 θ_{eB}^l を求め、A 点の支点上曲げモーメントを $M_A = 0$ として取り扱うことも可能)、BC 間に外力の作用はないから、同様の支点 B には外力によるたわみ角は生じないため $\theta_{eB}^r = 0$ を考慮すると)

$$\frac{L}{I} M_0 + 2 \left(\frac{L}{I} + \frac{L}{I} \right) M_B + \frac{L}{I} M_C = 0 \tag{8}$$

B-C-D 間について、(BC, CD 間に外力の作用はないから $\theta_{eC}^l = \theta_{eC}^r = 0$ を考慮すると)

$$\frac{L}{I} M_B + 2 \left(\frac{L}{I} + \frac{L_0}{I_0} \right) M_C + \frac{L_0}{I_0} M_D = 0 \tag{9}$$

さらに、 $I_0 = \infty$ であるから $L_0/I_0 = 0$ であり、式(9)は次のように表せる。

$$\frac{L}{I} M_B + 2 \frac{L}{I} M_C = 0 \tag{10}$$

したがって、式(8)、(10)より、図-5 に示す連続ばりに3連モーメント公式を適用すると、支点モーメント M_B 、 M_C を未知数とする二元連立一次方程式が得られ、それらを解くことによって M_B 、 M_C が求められることとなる。

【参考文献】

- 1) 崎元達郎：構造力学 [第2版] 上 - 静定編 -, 森北出版, 2012.
- 2) 崎元達郎：構造力学 [第2版] 下 - 不静定編 -, 森北出版, 2012.