

純ねじり

’15.07.24

加藤久人

三好崇夫

目次

2. 純ねじり

2.0 純ねじり(St. Venantねじり)誘導式のまとめ

2.1 丸棒の純ねじり

2.2 薄肉円筒体の純ねじり

2.3 矩形断面の角棒の純ねじり

2.4 任意断面の棒の純ねじり

2.5 ねじり問題の応力関数

2.6 石鹼膜相似

2.7 丸棒の例

2.8 薄肉円筒体の例

2.9 任意形状の薄肉筒体の純ねじり

2.10 薄肉筒体の純ねじりにおける変形

2.11 薄肉筒体の純ねじりの計算例

2.12 薄板の純ねじり

2.13 薄肉折れ板開断面構造の純ねじり

2.14 任意形状の薄肉開断面構造の純ねじり

2.15 分岐のある薄肉壁のせん断流

2.16 多室薄肉構造のせん断流

2.17 多室薄肉閉断面構造の計算例

2.18 2軸対称矩形薄板筒体の純ねじり

2.19 矩形棒の純ねじり

付録-2.A せん断ひずみとせん断応力の定義

付録-2.B ラプラス演算の直交座標系から極座標系への変換

付録-2.C 一周積分

付録-2.D 矩形棒の応力関数の誘導

参考文献

1. 純ねじり

純ねじりの問題はサンブナンのねじり問題^{1)~4), 6)~8)}とも呼ばれ, 1853 年の *Memoire sur la torsion des prismes*, Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant に起源を置く。純ねじりでは棒軸方向の拘束は無いものとして, 変形後の断面形状に変化が無いことから, 直ひずみは発生せず, 純せん断のひずみ状態を前提とする。丸棒断面はあらゆる方向が対称軸となり, ねじりモーメントが作用しても断面外へのそり変形は生じず, 断面のせん断応力は中心からの距離に比例する。任意の断面ではそりが発生するため応力分布は複雑となる。この応力状態を追跡するために考案された関数がねじりの応力関数 $\Phi^{9), 10)}$, あるいは本資料での f_{ai} であり, この関数が石鹼膜を表す関数 h と相似であることが 1903 年プラントルにより *Zur torsion von prismatischen stäben*, Ludwig Prandtl によって見出されている。

鋼構造物は薄鋼板で円筒あるいは箱断面を形成し, ねじりに抵抗できる断面を創り出している。いわゆる薄肉閉断面構造に対応したねじり定数の算定公式が 1896 年ブレッドにより *Kritische Bemerkungen zur Drehungselastizität*, Bredt-Batho の研究から見出されている。ここまで理論ではねじり変形の後も断面の形状に変化はなく, またそりを拘束する影響も考慮されていない。ウラゾフが 1961 年に発表した *Thin Walled Elastic Beams*, V. Z. Vlasov⁵⁾ では一般化座標法の手法によりこのような問題を自在に取り込める微分方程式が誘導されている。

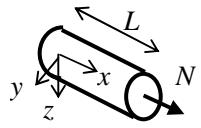
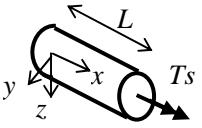
本資料は主に大阪大学名誉教授, 故小松定夫著, 薄肉構造物の理論と計算, 1969., 山海堂出版の第 2 章を基本に式の誘導, 補足説明を加え詳細に解説したものである。

2.0 純ねじり(St. Venantねじり)誘導式のまとめ

本資料で説明する純ねじりの解説について主要な部分を以下にまとめる。
式番号は各節の式をそのまま引用するため不連続である。詳細は各節を参照されたい。

1) 丸棒の圧縮・引張問題と純ねじり問題の比較

表-0.1 丸棒の圧縮・引張問題と純ねじり問題の比較

| 丸棒 (一般断面ではない) | 圧縮・引張問題 | 純ねじり問題 |
|------------------|---|--|
| |  |  |
| 作用力 | 軸力 N | ねじりモーメント T_s |
| 断面性能 | 断面積 A | 純ねじり定数 J |
| 弹性定数 | E | G |
| 変位 | 伸び u | 回転角 ϕ |
| 単位変位 | $\varepsilon = u/L$ | $\theta = \phi/L \rightarrow \gamma = r\theta$ |
| 応力-ひずみ関係 | $\sigma = E \varepsilon$ (断面内一定) | $\tau = G \gamma = G r\theta$ (丸棒は r に比例)* |
| 作用力-応力関係 | $\begin{aligned} & \int \int \sigma dy dz \\ &= \int \int E \varepsilon dy dz \\ &= E \varepsilon \int \int dy dz \\ &= \varepsilon EA \\ &= N \end{aligned}$ | $\begin{aligned} & \int \int \tau r dy dz \\ &= \int \int G r \theta r dy dz \\ &= G \theta \int \int r^2 dy dz \\ &= \theta GJ \quad (\text{これは丸棒の場合}) \\ &= T_s \end{aligned}$ |
| 基礎式 | $N = EA \varepsilon = EA \cdot du/dx$ | $T_s = GJ\theta = GJ \cdot d\phi/dx$ |
| 備考 | | *:一般断面では応力関数 f_{ai} で決定 |

2) 一般断面に対するねじり問題の応力関数 $f_{si}(y, z)$

a) ひずみについて

ねじり変形に伴う任意点のそり(軸方向変位)を u , そり関数を $U(y, z)$ として, $u = \partial U(y, z)/\partial x \dots \dots (4.5)$

$$\text{純ねじりでは軸方向の伸び縮み無しから, } \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \partial U(y, z) = 0 \dots \dots (4.7)$$

また, 断面内の変形無しから,

$$\varepsilon_y = \frac{\partial}{\partial y}(-z \partial x) = 0 \dots \dots (4.8), \quad \varepsilon_z = \frac{\partial}{\partial z}y \partial x = 0 \dots \dots (4.9), \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial}{\partial z}(-z \partial x) + \frac{\partial}{\partial y}(y \partial x) = -\partial x + \partial x = 0 \dots \dots (4.10)$$

せん断ひずみの定義から,

$$\gamma_{yx} = \gamma_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \partial U(y, z) + \frac{\partial}{\partial x}(-z \partial x) = \partial \left(\frac{\partial U}{\partial y} - z \right) \dots \dots (4.11)$$

$$\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{\partial}{\partial x}(y \partial x) + \frac{\partial}{\partial z} \partial U(y, z) = \partial \left(\frac{\partial U}{\partial z} + y \right) \dots \dots (4.12)$$

b) 応力とひずみの関係式

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-2\nu)(1-\nu)} \{ (1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y + \nu\varepsilon_z \} \cdots \cdots (4.13)_1$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-2\nu)(1-\nu)} \{ \nu\varepsilon_x + (1-\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_z \} \cdots \cdots (4.13)_2$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1-2\nu)(1-\nu)} \{ \nu\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y + (1-\nu)\varepsilon_z \} \cdots \cdots (4.13)_3$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \cdots \cdots (4.13)_{4,5,6}$$

これらに既に求めたひずみの成分、式(4.7)～(4.9)を代入して、

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = 0 \cdots \cdots (4.14)_{1,2,3}$$

共役せん断の関係に留意しつつ、図-0.1を参照して、式(4.10)より、 $\tau_{yz} = \tau_{zy} = G \cdot \gamma_{yz} = G \cdot 0 = 0 \cdots \cdots (4.14)_4$

$$\text{式(4.11)より}, \quad \tau_{yx} = \tau_{xy} = G\gamma_{yx} = G\nu \left(\frac{\partial U}{\partial y} - z \right) \cdots \cdots (4.14)_5$$

$$\text{式(4.12)より}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = G\gamma_{zx} = G\nu \left(\frac{\partial U}{\partial z} + y \right) \cdots \cdots (4.14)_6$$

c) 応力のつり合い式

図-0.2に示す、微小6面体要素に生じる応力と体積力 b_x, b_y, b_z のつりあい x 軸方向について、

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx - \sigma_x \right) dy dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy - \tau_{xy} \right) dz dx + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz - \tau_{xz} \right) dx dy + b_x dx dy dz = 0 \cdots \cdots (4.16)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_x = 0 \cdots \cdots (4.17)$$

同様に、

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = 0 \cdots \cdots (4.18)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + b_z = 0 \cdots \cdots (4.19)$$

d) 境界条件

周縁上に表面力は無いので、周縁に直交方向のせん断応力は存在しない、図-0.3を参照して、

$$\tau_{xn} = \tau_{xy}l + \tau_{xz}m = \tau_{xy} \frac{dz}{ds} - \tau_{xz} \frac{dy}{ds} = 0 \cdots \cdots (4.24) \quad \text{ここに, } l, m \text{ は周縁の傾斜}$$

e) せん断応力が満たすべき条件

図-0.4に微小要素に生じるせん断応力を示す。

(4.18)は、(4.14)₂から $\sigma_y = 0$ 、(4.14)₄から $\tau_{yz} = 0$ 、容積力は無く $b_y = 0$ から、

$$0 + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + 0 + 0 = 0 \rightarrow \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = 0 \rightarrow \text{共役性から} \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \cdots \cdots (4.26)$$

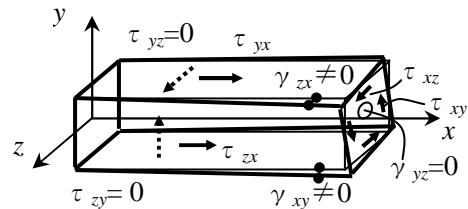


図-0.1 純ねじりにおけるせん断ひずみと応力

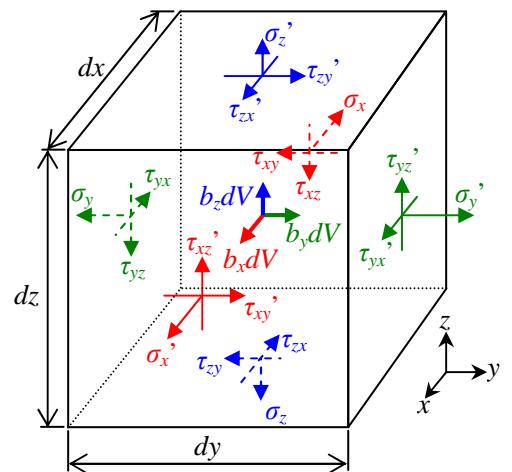


図-0.2 3次元弾性体中の微小要素に作用する応力

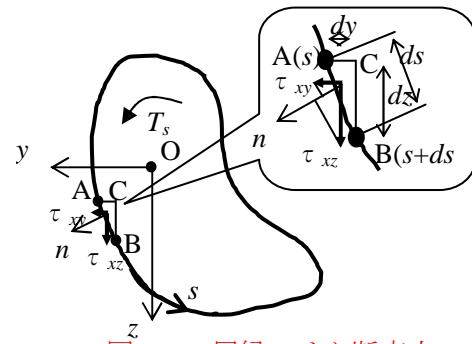


図-0.3 周縁のせん断応力

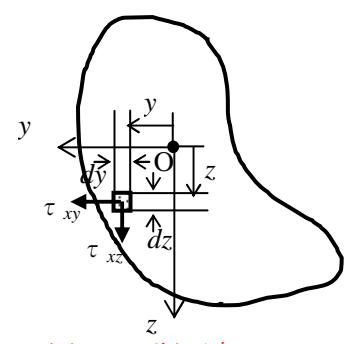


図-0.4 断面内の微小要素のせん断応力

(4.19)は、(4.14)₃から $\sigma_z=0$ 、(4.14)₄から $\tau_{yz}=0$ 、容積力は無く $b_z=0$ から、

$$0 + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + 0 + 0 = 0 \rightarrow \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = 0 \rightarrow \text{共役性から } \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0 \cdots \cdots (4.27)$$

(4.17)について、(4.14)₁の $\sigma_x=0$ 、容積力が無い $b_x=0$ の条件を用いると、

$$0 + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + 0 = 0 \rightarrow \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \rightarrow \text{共役性から } \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \cdots \cdots (4.28)$$

f) 応力関数 f_{ai}

下記の関係を満足する応力関数 f_{ai} を導入する。

$$\frac{\partial f_{ai}}{\partial z} = \tau_{xy}, \quad -\frac{\partial f_{ai}}{\partial y} = \tau_{xz} \cdots \cdots (5.1)_{1,2}$$

f_{ai} は y, z のみの関数であるから、式(4.26), (4.27)は以下より満足される。

$$\text{式(4.26)} \rightarrow \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f_{ai}}{\partial z} = 0 \cdots \cdots (5.2)_1$$

$$\text{式(4.27)} \rightarrow \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial f_{ai}}{\partial y} \right) = 0 \cdots \cdots (5.2)_2$$

式(4.28)については(5.1)_{1,2}を代入して満足される。

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f_{ai}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f_{ai}}{\partial y} = \frac{\partial^2 f_{ai}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f_{ai}}{\partial y \partial z} = 0 \cdots \cdots (5.2)_3$$

g) せん断応力の関係を満足する式

式(4.14)_{5,6}と(5.1)_{1,2}をそれぞれ等置して、

$$\tau_{xy} = G \vartheta \left(\frac{\partial U}{\partial y} - z \right) = \frac{\partial f_{ai}}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = G \vartheta \left(\frac{\partial U}{\partial z} + y \right) = -\frac{\partial f_{ai}}{\partial y} \cdots \cdots (5.3)_{1,2}$$

式(5.3)₁を z で微分、式(5.3)₂を y で微分し、 U を消去すると、

$$G \vartheta \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - 1 \right) = \frac{\partial^2 f_{ai}}{\partial z^2}, \quad G \vartheta \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} + 1 \right) = -\frac{\partial^2 f_{ai}}{\partial y^2} \cdots \cdots (5.4)_{1,2}$$

$$\frac{\partial^2 f_{ai}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_{ai}}{\partial z^2} = -2G \vartheta \cdots \cdots (5.5)$$

h) 境界条件を満足する式

境界条件について式(4.24)に(5.1)_{1,2}を代入して、全微分の関係から、

$$0 = \tau_{xy} \frac{dz}{ds} - \tau_{xz} \frac{dy}{ds} = \frac{\partial f_{ai}}{\partial z} \frac{dz}{ds} - \left(-\frac{\partial f_{ai}}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) = \frac{\partial f_{ai}}{\partial z} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial f_{ai}}{\partial y} \frac{dy}{ds} \cdots \cdots (5.6) \rightarrow \frac{\partial f_{ai}}{\partial s} = 0 \cdots \cdots (5.7)$$

3) 図-0.4 に示す任意断面について、応力関数 f_{ai} の性質

上記を満足する微分方程式として断面のあらゆる点で

$$\frac{\partial^2 f_{ai}(y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_{ai}(y, z)}{\partial z^2} = -2G\vartheta \cdots \cdots (5.5), \text{ 境界で, } \frac{\partial f_{ai}}{\partial s} = 0 \cdots \cdots (5.7)$$

このような条件を満たす f_{ai} を見つけることができれば、ねじりに伴う発生応力を決定できる。

$$\frac{\partial f_{ai}}{\partial z} = \tau_{xy}, \quad -\frac{\partial f_{ai}}{\partial y} = \tau_{xz} \cdots \cdots (5.1)_{1,2}$$

また、作用モーメントと f_{ai} の関係は、

$$T_s = 2 \iint_A f_{ai}(y, z) dy dz \cdots \cdots (5.10)_3$$

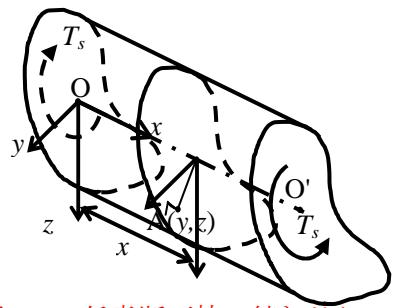


図-0.4 任意断面棒の純ねじり

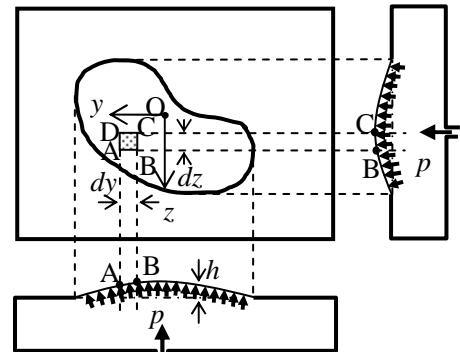


図-0.5 石鹼膜の変形

4) ねじり定数 J の誘導

図-0.5 に示す石鹼膜の微分方程式、

$$\frac{\partial^2 h(y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h(y, z)}{\partial z^2} = -\frac{p}{H} \cdots \cdots (6.6)$$

式(5.5)と(6.6)の Prandtl の相似性から、

$$f_{ai}(y, z) = 2G\vartheta \frac{H}{p} h(y, z) \cdots \cdots (6.10) \quad (\text{一般に } h(y, z) \text{ には } p/H \text{ の項が含まれる。})$$

作用モーメントとせん断弾性係数 G 、単位ねじり角 ϑ 、ねじり定数 J の関係は、 $T_s = GJ\vartheta \cdots \cdots (5.14)$

$$\text{式(5.10)₃ を用いて変形すると, } J = \frac{T_s}{G\vartheta} = \frac{2 \iint_A f_{ai}(y, z) dy dz}{G\vartheta} = 4 \frac{H}{p} \iint_A h(y, z) dy dz \cdots \cdots (5.15)$$

式(6.10)より f_{ai} は $G\vartheta$ の項を含み、かつ h には p/H の項が含まれるので J は石鹼膜の体積積分値となる。

4) 薄肉閉断面のねじり

図-0.6 に示す断面のそりを周縁に沿って一周積分すると、 $u_\vartheta + u_\gamma = -\oint r_s \vartheta ds + \oint \frac{\tau}{G} ds = 0 \cdots \cdots (10.7)$

第1項は筒体側面の微小板の回転によるそり、第2項は同微小板のせん断変形によるそりの一一周分

$$\text{第1項に面積分の関係式を代入, } \oint r_s ds = 2 \oint dA = 2A \cdots \cdots (10.9)$$

第2項にせん断流一定と循環せん断流の関係式を代入、

$$T_s = \oint q r_s ds \cdots \cdots (9.8)_1$$

$$\text{Bredt-Batho の式が得られる. } \vartheta = \frac{1}{2A} \frac{T_s}{2A} \oint \frac{1}{tG} ds = \frac{T_s}{4A^2} \oint \frac{1}{tG} ds \cdots \cdots (10.11)_1$$

$$\text{式(5.14)} \rightarrow T_s = GJ\vartheta \text{ の関係から, } J = \frac{4A^2}{\oint \frac{1}{t} ds} \cdots \cdots (10.11)_2$$

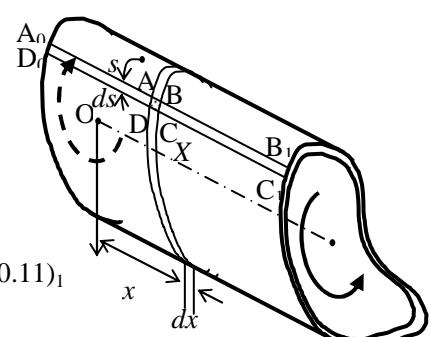
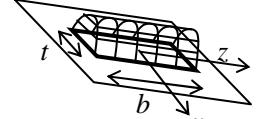
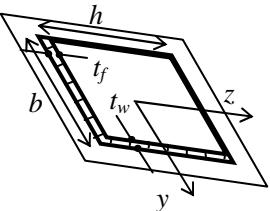
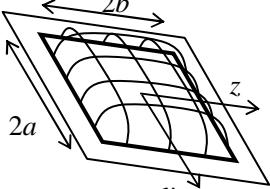


図-0.6 任意薄肉筒体のねじり

5) 代表断面の純ねじり公式

本資料で説明する代表断面に対するねじり応力関数 f_{ai} とねじり定数 J を表-0.2 に示す。

表-0.2 代表断面の純ねじり公式

| 形状、掲載節 | f_{ai} の形 | ねじり応力関数 f_{ai} | ねじり定数 J |
|----------------------|---|---|--|
| 丸棒 1.1, 1.7 |  | $f_{ai}(r, \theta) = G\vartheta \frac{R^2}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\}$ | $J = I_P = \frac{1}{2} \pi R^4$ |
| 薄肉円筒体 1.2, 1.8 |  | $f_{ai}(r, \theta) = G\vartheta \frac{R^2}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\}$ $R > r > r_i$ | $J = I_P = \frac{1}{2} \pi (R^4 - r_i^4)$ |
| 薄板 1.12 |  | $f_{ai}(y, z) = G\vartheta \left(\frac{t^2}{4} - y^2 \right)$ | $J = \frac{1}{3} bt^3$ |
| 矩形薄板筒体 1.11, 1.18 |  | $f_{ai}\left(y, \pm \frac{h}{2}\right) = \frac{q}{t_f} z$ $f_{ai}\left(\pm \frac{b}{2}, z\right) = \frac{q}{t_w} z$ $q = \frac{T_s}{2bh}$ | $J = \frac{4b^2h^2}{\frac{b}{t_f} + \frac{h}{t_w} + \frac{b}{t_f} + \frac{h}{t_w}}$ $J = \frac{4A^2}{\oint \frac{1}{t} ds}$ |
| 矩形棒 1.19 |  | 表外の f_{ai} | 表外の J |

矩形棒の f_{ai} と J

$$f_{ai} = G\vartheta \left\{ \left(a^2 - y^2 \right) - \frac{32a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1}{\cosh \frac{n\pi}{2a} b} \right) \cos \frac{n\pi y}{2a} \cosh \frac{n\pi z}{2a} \right\}$$

$$J = \frac{2b(2a)^3}{3} \left(1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{a}{b} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi b}{2a} \right)$$

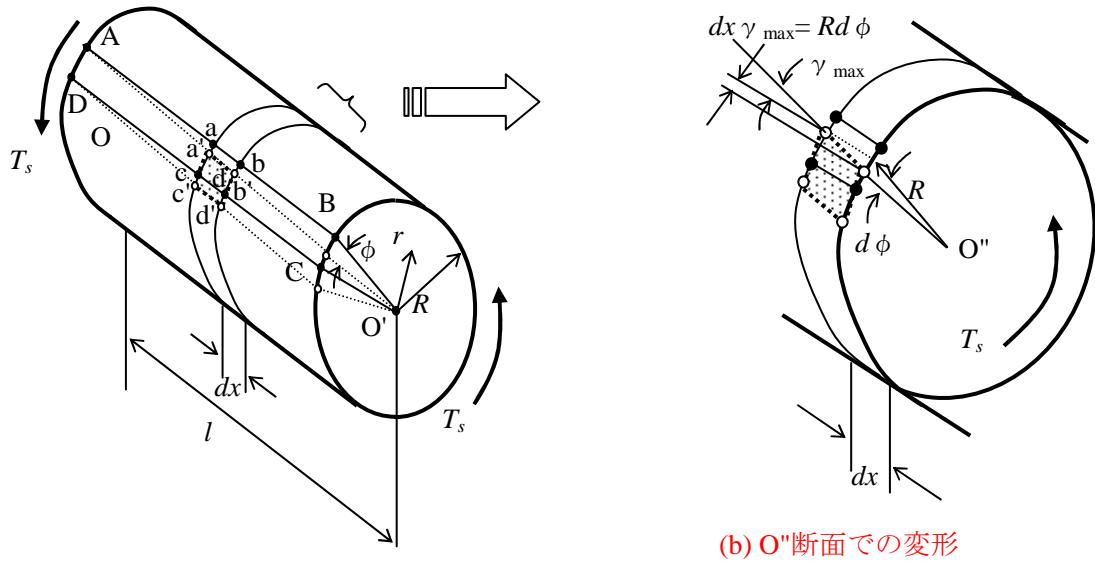
2.1 丸棒の純ねじり

半径 R の等断面から成る丸棒の両端に大きさ T_s のねじりモーメントが作用した場合を考える。丸棒の純ねじりにおいては、ある断面はその中心 O_1 の回りに回転する。断面形状が O_1 に軸対称であるから、同一円周上にある各点は円周の方向に同じだけ変位する。しかし、丸棒の軸方向へは変位しない。すなわち、元平面であった断面は、ねじれた後も平面を保持し **そりを生じない**。

変形前に、図-1.1 (a) のように軸 OO' に平行な丸棒表面上の線分と隣接断面で囲まれる長方形要素 $abcd$ は変形後に平行四辺形 $a'b'c'd'$ になる。ねじり変形によって生じる両端でのねじり角を ϕ とすると幾何学的相似より軸方向に微小距離 dx を隔てた間でのねじり角 $d\phi$ は以下の関係で示される。

$$\frac{dx}{l} = \frac{d\phi}{\phi} \quad \rightarrow \quad \frac{d\phi}{dx} = \frac{\phi}{l} \dots \dots (1.1)_{1,2}$$

$b'd'$ の $a'c'$ に対する相対変位は、同図 (b), (c), (d) を参照して $Rd\phi$ である。従って、半径 R の円周上にある微小要素 $a'b'c'd'$ のせん断ひずみ γ_{\max} は変形が微小であることを前提に、



(a) 丸棒のねじり変形

(b) O'' 断面での変形

(c) 断面内の変形

(d) 外周面での変形

図-1.1 丸棒の純ねじり

$$\frac{R \cdot d\phi}{dx} = \tan \gamma_{\max} \doteq \gamma_{\max} \cdots \cdots (1.2)$$

よって,

$$R \cdot d\phi = dx \gamma_{\max} \rightarrow \gamma_{\max} = R \frac{d\phi}{dx} \cdots \cdots (1.3)_{1,2}$$

外周でのせん断応力 τ_{\max} とせん断弾性係数 G の関係を用いて,

$$\tau_{\max} = G \gamma_{\max} = GR \frac{d\phi}{dx} \cdots \cdots (1.4)$$

棒内部の半径 r の円周上にある微小要素についても同様の関係があるので,

$$\tau = Gr \frac{d\phi}{dx} \cdots \cdots (1.5)$$

上式より丸棒の中心では $r = 0$ から $\tau = 0$ となり, τ は中心から距離に比例して大きくなる.

τ を円の断面全体で面積分を行うと作用ねじりモーメント T_s につりあう. 同図 (c) を参照して,

$$T_s = \oint_A \tau r dA = \oint_A Gr \frac{d\phi}{dx} r dA = \int_0^R \int_0^{2\pi} Gr^2 \frac{d\phi}{dx} r d\theta dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} G \frac{d\phi}{dx} r^3 d\theta dr \cdots \cdots (1.6)$$

等断面の丸棒では G および $d\phi/dx$ は断面内で一定のため,

$$T_s = G \frac{d\phi}{dx} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 d\theta dr = G \frac{d\phi}{dx} \int_0^R r^3 [\theta]_0^{2\pi} dr = G \frac{d\phi}{dx} 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = G \frac{d\phi}{dx} \frac{1}{2} \pi R^4 \cdots \cdots (1.7)$$

$$I_P = \frac{1}{2} \pi R^4 \cdots \cdots (1.8)$$

とすると,

$$T_s = G \frac{d\phi}{dx} I_P \text{ または } T_s = G \frac{d\phi}{dx} J \cdots \cdots (1.9)_{1,2}$$

一般に I_p あるいは J をねじり定数と呼ぶ.

等断面の丸棒では $d\phi/dx$ は軸方向に一定で, これをねじり率 ϑ とする. 単位は mm^{-1} である.

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\phi}{l} = \vartheta \cdots \cdots (1.10)$$

式(1.9)₁ を変形して,

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T_s}{GI_P} \cdots \cdots (1.11)$$

式(1.4)に式(1.11)を代入して,

$$\tau_{\max} = GR \frac{d\phi}{dx} = GR \frac{T_s}{GI_P} = \frac{T_s R}{I_P} \cdots \cdots (1.12)$$

純ねじりを St.Venant のねじりという.

2.2 薄肉円筒体の純ねじり

図-2.1 に示すような半径 R , 内半径 r_i の中空円断面の筒体の純ねじりについて, ねじりモーメント T_s は次式で与えられる. 最外縁に生じるせん断応力を τ_{\max} とすると式(1.6)を参考に,

$$T_s = \int_A \tau r \cdot dA = \int_{r_i}^R \int_0^{2\pi} \tau_{\max} \frac{r}{R} r \cdot rd\theta dr = \frac{\tau_{\max}}{R} \int_{r_i}^R r^3 [\theta]_0^{2\pi} dr = \frac{\tau_{\max}}{R} 2\pi \frac{1}{4} [r^4]_{r_i}^R dr = \frac{\tau_{\max}}{R} \frac{1}{2} (R^4 - r_i^4) \cdots \cdots (2.1)$$

$$I_P = \frac{1}{2} \pi (R^4 - r_i^4) \cdots \cdots (2.2)$$

とすると,

$$T_s = \frac{\tau_{\max}}{R} I_P \rightarrow \tau_{\max} = \frac{T_s R}{I_P} \cdots \cdots (2.3)_{1,2}$$

もし管の板厚 t が半径に比して十分小さい薄肉管材では, 外縁と内縁のせん断応力の大きさにはほとんど差異が無く, せん断応力は板厚方向に一定値 τ_m をもつと仮定してもよい. 従って, ねじりモーメント T_s は, 平均半径 r_m を用いて,

$$T_s = \tau_m \cdot t r_m \cdot 2\pi r_m \cdots \cdots (2.4)$$

よって,

$$\tau_m = \frac{T_s}{t \cdot 2\pi r_m^2} \cdots \cdots (2.5)$$

ところで $A_m = \pi r_m^2$ は管厚の中心線で囲まれる円の面積に他ならない, よって

$$\tau_m = \frac{T_s}{2tA_m} \cdots \cdots (2.6)$$

また, ,ねじり率 $\vartheta = d\phi/dx$ は中実断面の場合と同様に管軸方向に一定で, 式(1.10)から

$$\frac{d\phi}{dx} = \vartheta = \frac{T_s}{GI_P} \rightarrow T_s = GI_P \vartheta \cdots \cdots (2.7)$$

式(2.2)を代入して

$$\frac{d\phi}{dx} = \vartheta = \frac{T_s}{G} \frac{2}{\pi(R^4 - r_i^4)} = \frac{T_s}{G} \frac{2}{\pi(R^2 - r_i^2)(R^2 + r_i^2)} \cdots \cdots (2.8)$$

$$R - r_i = t_m, \quad R + r_i = 2r_m, \quad R^2 + r_i^2 \doteq r_m^2 + r_m^2 = 2r_m^2 \cdots \cdots (2.9)_{1,2,3}$$

の関係を代入して,

$$\vartheta \doteq \frac{T_s}{G} \frac{2}{\pi(R - r_i)(R + r_i)2r_m^2} = \frac{T_s}{G} \frac{2}{\pi t \cdot 2r_m \cdot 2r_m^2} = \frac{T_s}{2\pi t \cdot r_m^3 G} \cdots \cdots (2.10)$$

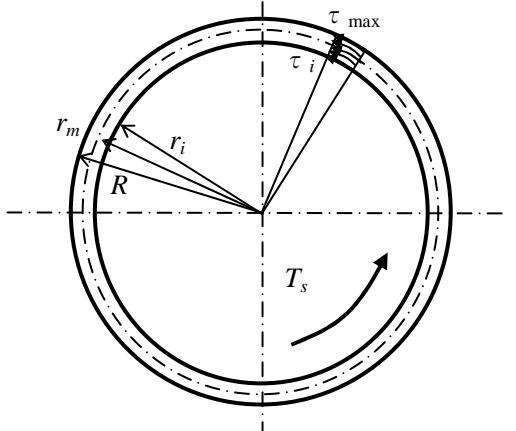


図 2.1 薄肉円筒体の純ねじり

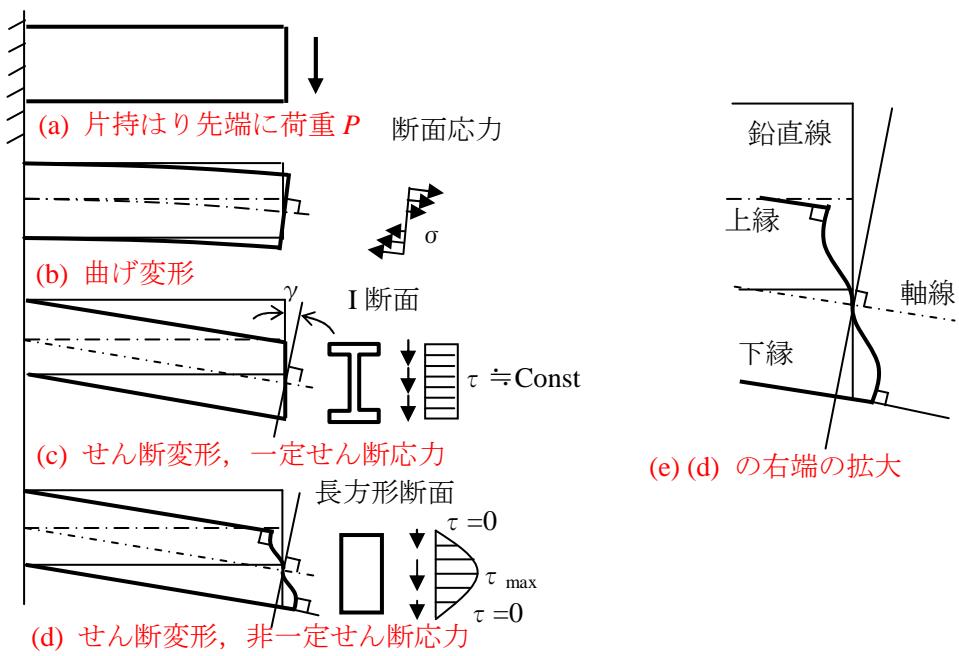


図-3.1 片持はりの誇張した変形

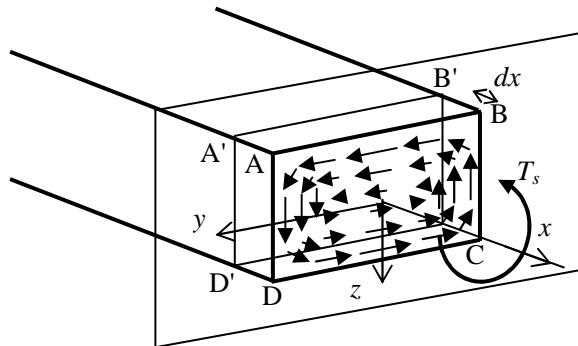


図-3.2 矩形断面棒のねじり

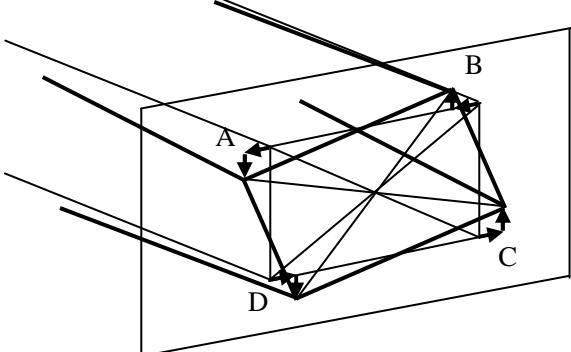


図-3.3 断面内の回転変位

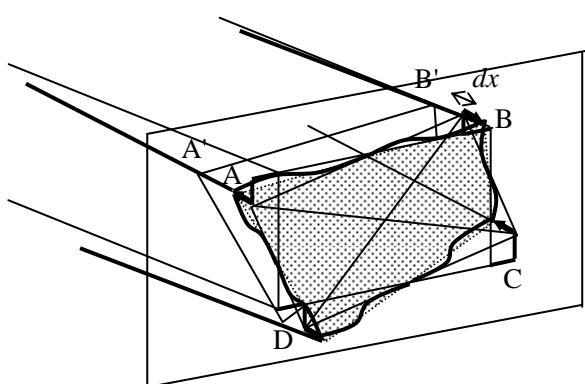


図-3.4 断面外へのそり変位

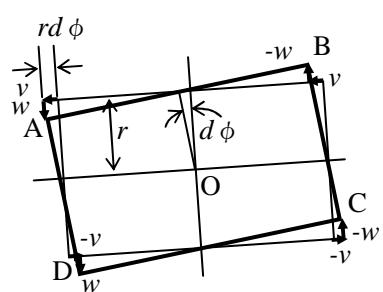


図-3.5 dx 区間の回転変形

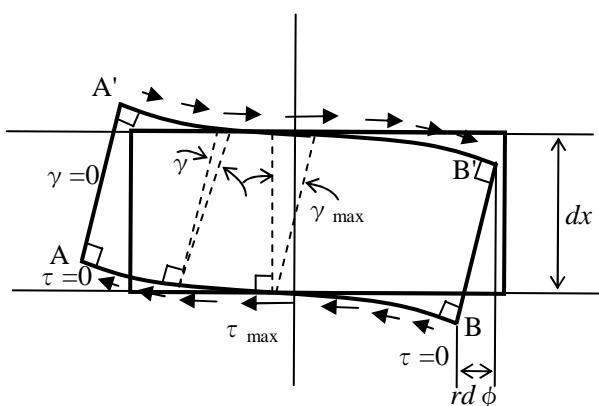


図-3.6 dx 区間の上面変形

2.3 矩形断面の角棒の純ねじり

矩形断面を有する中実棒が純ねじりを受ける場合について説明する。ねじりの問題を説明する前にせん断力によるはりの変形について検討する。[図-3.1](#)に片持ばかりの変形の状況を誇張して示す。[\(a\)](#)に示す先端に鉛直荷重が作用する場合の変形を[\(b\)](#)の曲げ変形と[\(c\)](#), [\(d\)](#)のせん断変形に分解して考える。[\(c\)](#)は断面が例えばI形状のウェブの場合で,[\(d\)](#)は長方形の場合であり,[\(e\)](#)は[\(d\)](#)の先端部の拡大である。

[\(b\)](#)に示されるとおり、曲げ変形ではいずれの断面形状であっても、変形後の断面は平面保持の仮定に従うとして軸線に対して直角を保つ。この結果、断面は鉛直線に対して出入りを有する。

次にせん断変形であるが、[\(c\)](#)の場合、別資料、[曲げ変形とせん断変形](#)に紹介するせん断流理論の知見からI断面のウェブ部に生じるせん断応力の分布は一定に近いものと解釈される。この場合、せん断変形は元々はりの側面図で長方形であったものが大局的には平行四辺形になる変形となる。先端に着目すると、断面は平面を保持し、しかも鉛直線に平行となる。また、軸線とは交角を有し、この角度はせん断ひずみ γ となる。

[\(d\)](#)に示す断面が長方形の場合、せん断応力の分布は放物線となり上下縁ではゼロ、高さの中間で最大 τ_{\max} となる。せん断変形は作用するせん断応力に比例するので、これに応じて断面は高さ方向に曲面となる。上下縁では τ はゼロのためせん断ひずみは生じず、断面は上縁あるいは下縁の線に直交する。一方、中間位置では γ_{\max} となり、断面は鉛直線と平行となる。これらの結果、[\(d\)](#)の場合、先端の断面は平面を保持せず、鉛直線に対して出入りを有する。この出入りをせん断変形に伴うそりと呼ぶ。

ちなみに、この現象は薄肉開断面の部材にねじりを加えた時に生じるそりねじりに伴う出入りとは異なる。一般にこの出入りをそりとして呼称するが、前述がせん断変形に伴う出入りであるのに対して、後述は曲げ変形に伴うもので、[\(b\)](#)の変形に類似のものである。

さて、矩形断面を有する棒がねじりモーメント T_s を受ける時、[図-3.2](#)に示す微小距離 dx を隔てて隣接する2断面ABCD、とA'B'C'D'は相対ねじり角 $d\phi$ を生じる。すると、[図-3.5](#)に示すように軸線Oから距離 r を隔てる側辺ABはA'B'に対して側辺の方向に $rd\phi$ なる相対変位を生じる。円柱の場合のように断面が変形後も平面保持するものと仮定すれば、辺ABに沿って一様にせん断応力 τ を生じることになる。しかし、矩形断面においては[図-3.2](#)に示すようにせん断応力の分布は辺ABに沿って一定ではなく、特に隅角部AおよびBでは辺AB方向のせん断応力は、生じない。すなわち、はりのせん断変形の[図-3.1\(e\)](#)に示したように、せん断応力が非一様に分布する場合は断面に出入りが生じたことと同様の現象が矩形棒の純ねじりの場合に生じてくる。

矩形棒のねじり変形を分解して示すと、[図-3.3](#)と[3.4](#)となる。[図-3.3](#)には断面内の回転変位を、また、[図-3.4](#)には面外へのそり変位を示す。[図-3.6](#)は、ねじられた矩形棒の dx 区間を上方から見た平面図ABB'A'であるが、隅角点AとBではせん断応力ゼロからせん断ひずみは生じず、断面の辺ABに対して、稜線AA'あるいはBB'は直交する。一方、ABの中間点では最大のせん断ひずみを生じ、結果として断面に出入りが生じる。下面の辺CDではABの逆方向の出入りが生じる。この状況を3次元に示したのが先述の[図-3.4](#)である。以上から矩形棒のねじりにおいて断面の変形は円柱の場合のように断面内だけで生じるのではなく、軸方向あるいは断面外にも生じることが理解される。一般に、ねじりに伴って断面の各点が、軸方向に変位を生じ、もはや元の平面を保持しない場合、この軸方向変位を断面のそりという。円断面以外の任意断面の中実棒がねじりを受けた場合には、このようなそりが生じる。

矩形断面の棒の純ねじりにおける応力の分布は[2.19節](#)に詳説する。

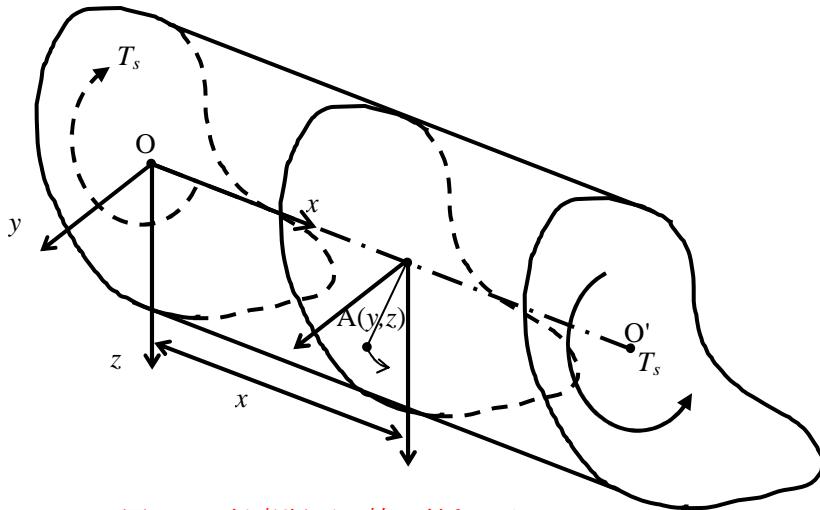
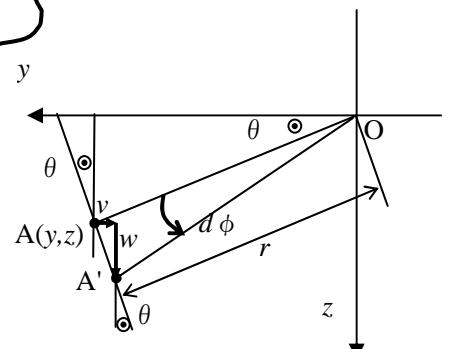


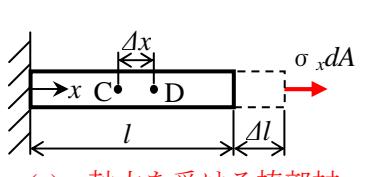
図-4.1 任意断面の棒の純ねじり



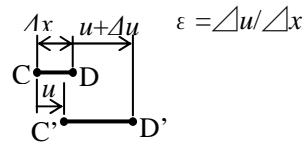
$$v \doteq -r \cdot d\phi \cdot \sin \theta = -z \cdot d\phi$$

$$w \doteq r \cdot d\phi \cdot \cos \theta = y \cdot d\phi$$

図-4.2 微小回転に伴う変位



(a) 軸力を受ける棒部材



(b) 微小要素の変形

図-4.3 部材軸方向の変位

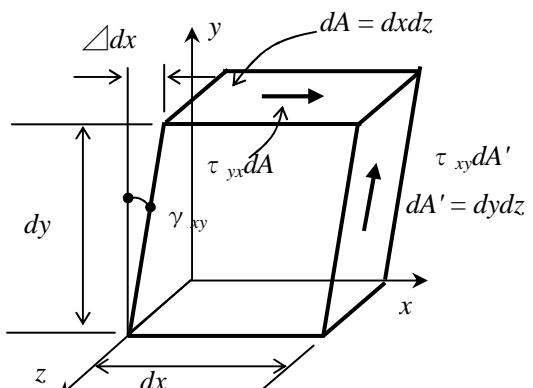


図-4.4 微小要素のせん断変形

2.4 任意断面の棒の純ねじり

図-4.1 に示す任意形状の断面を有する中実体の純ねじりについて説明する。図-4.2 はある断面内の点 $A(y, z)$ が O の回りに微小回転 $d\phi$ を生じて A' に移動した時の y 軸, z 軸方向の変位 v, w を示す。このとき $A'(y+v, z+w)$ となる。変形前に A 点は O から r の距離にあり、 AO は y 軸と θ の角度を有しているとす

る。また、微小回転であるため A 点の円弧上の移動距離 $rd\phi$ が斜距離 AA'に近似的に等しいと考える。

$$v = -r \cdot d\phi \cdot \sin\theta = -z \cdot d\phi \cdots \cdots (4.1)$$

$$w = r \cdot d\phi \cdot \cos\theta = y \cdot d\phi \cdots \cdots (4.2)$$

図-4.1 に示すように、ねじりの中心 O を通り一端の断面内に直交座標 y, z をとり、棒の軸に沿って x 軸をとる。純ねじりにおいては、ねじり変形が生じた後も軸方向に出入りは生じるがその変位について軸方向に変化はない。すなわち **1.3 節** で述べたと同様に、棒中の断面はそり変形を生ずるがその変形は棒中のいかなる断面でも同じとなる。従って、ねじり率 $\vartheta = d\phi/dx$ は x に無関係に一定と考えられる。 x 点の回転角は微小で ϑ_x とすると、原点 O を通る断面に対して座標 x にある断面上の任意の点 A(y, z) の y 軸および z 軸方向の相対変位、 v および w は式(4.1), (4.2)に $d\phi = \vartheta_x$ を代入して次式となる。

$$v = -z \vartheta_x \cdots \cdots (4.3)$$

$$w = y \vartheta_x \cdots \cdots (4.4)$$

これに加えて任意形状の断面においては、 x 軸方向にそり $u(y, z)$ を生じる。 u はその点の位置(y, z)の関数として変化し、断面は変形後に平面を保持しない。矩形棒と同様に u はねじり率に比例すると考えられるので、 u はそり関数 $U(y, z)$ を用いて次式のように表示できる。

$$u = \vartheta U(y, z) \cdots \cdots (4.5)$$

線形座屈理論概説、講習会資料の 2 章を参照して、3 次元直交座標系に関するひずみと変位の関係式を示すと、

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \cdots \cdots (4.6)_{1,2,3}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdots \cdots (4.6)_{4,5,6}$$

これらに、式(4.3),(4.4),(4.5)の u, v, w を代入すると、 ϑ は x 方向に一定、 U は y, z のみの関数であるので、

$$\varepsilon_x = \frac{\partial}{\partial x} \vartheta U(y, z) = 0 \cdots \cdots (4.7)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial}{\partial y} (-z \vartheta_x) = 0 \cdots \cdots (4.8)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial}{\partial z} y \vartheta_x = 0 \cdots \cdots (4.9)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \vartheta U(y, z) + \frac{\partial}{\partial x} (-z \vartheta_x) = \vartheta \left(\frac{\partial U}{\partial y} - z \right) \cdots \cdots (4.10)$$

$$\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{\partial}{\partial x} (y \vartheta_x) + \frac{\partial}{\partial z} (y \vartheta_x) = \vartheta \left(\frac{\partial U}{\partial z} + y \right) \cdots \cdots (4.11)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} (y \vartheta_x) + \frac{\partial}{\partial z} (-z \vartheta_x) = \vartheta \left(\frac{\partial U}{\partial z} - y \right) \cdots \cdots (4.12)$$

線形座屈理論概説、講習会資料の 2 章を参照して、**3 次元弾性体の応力とひずみの関係式**は、

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-2\nu)(1-\nu)} \{ (1-\nu) \varepsilon_x + \nu \varepsilon_y + \nu \varepsilon_z \} \cdots \cdots (4.13)_1$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-2\nu)(1-\nu)} \{ \nu \varepsilon_x + (1-\nu) \varepsilon_y + \nu \varepsilon_z \} \cdots \cdots (4.13)_2$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1-2\nu)(1-\nu)} \{ \nu \epsilon_x + \nu \epsilon_y + (1-\nu) \epsilon_z \} \dots \dots \dots (4.13)_3$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = G \gamma_{zx} \dots \dots \dots (4.13)_{4,5,6}$$

ここに, E : 弾性係数, G : せん断弾性係数, ν : ポアソン比である. 図-4.3, 4.4 に軸方向変形とせん断変形におけるひずみと応力の関係を示す. せん断ひずみとせん断応力の関係を付録-2.A に説明する. これらに既に求めたひずみの成分式(4.7)~(4.9)を代入して,

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-2\nu)(1-\nu)} \{ (1-\nu)0 + \nu \cdot 0 + \nu \cdot 0 \} = 0 \dots \dots \dots (4.14)_1$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-2\nu)(1-\nu)} \{ \nu \cdot 0 + (1-\nu)0 + \nu \cdot 0 \} = 0 \dots \dots \dots (4.14)_2$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1-2\nu)(1-\nu)} \{ \nu \cdot 0 + \nu \cdot 0 + (1-\nu)0 \} = 0 \dots \dots \dots (4.14)_3$$

別資料で説明する共役せん断応力の関係に留意しつつ,, 式(4.10)より, $\tau_{yz} = \tau_{zy} = G \cdot \gamma_{yz} = G \cdot 0 = 0 \dots \dots \dots (4.14)_4$

$$\text{式(4.11)より, } \tau_{yx} = \tau_{xy} = G \gamma_{xy} = G \nu \left(\frac{\partial U}{\partial y} - z \right) \dots \dots \dots (4.14)_5$$

$$\text{式(4.12)より, } \tau_{zx} = \tau_{xz} = G \gamma_{zx} = G \nu \left(\frac{\partial U}{\partial z} + y \right) \dots \dots \dots (4.14)_6$$

これらより垂直応力は全く存在しないことが分かる. 式(4.7)の $\epsilon_x = 0$ より x 軸方向に平行な縦繊維は伸縮を生じない. さらに, 式(4.8), (4.9)の $\epsilon_y = \epsilon_z = 0$ より断面形状は変形しないことがわかる. 純ねじりにおけるせん断ひずみと応力の関係を図-4.5 に示す.

図-4.6 に示す $dx \times dy \times dz$ の大きさの微小6面体要素に生じる応力と体積力 b_x, b_y, b_z のつりあいは, 例えは x 軸方向については, 下記の近似を元に,

$$\sigma_x' = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx, \quad \tau_{yx}' = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy, \quad \tau_{zx}' = \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \dots \dots \dots (4.15)_{1,2,3}$$

つりあいを考えると,

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx - \sigma_x \right) dy dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy - \tau_{yx} \right) dz dx + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz - \tau_{zx} \right) dx dy + b_x dx dy dz = 0 \dots \dots \dots (4.16)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_x = 0 \dots \dots \dots (4.17)$$

同様に,

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = 0 \dots \dots \dots (4.18)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + b_z = 0 \dots \dots \dots (4.19)$$

そり関数 U に関して, 第1式(4.17)に(4.14)_{1,5,6}の応力とひずみの関係を代入する. ねじり外力作用時に体積力は無く $b_x = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x} 0 + \frac{\partial}{\partial y} G \nu \left(\frac{\partial U}{\partial y} - z \right) + \frac{\partial}{\partial z} G \nu \left(\frac{\partial U}{\partial z} + y \right) + 0 = 0 \dots \dots \dots (4.20)$$

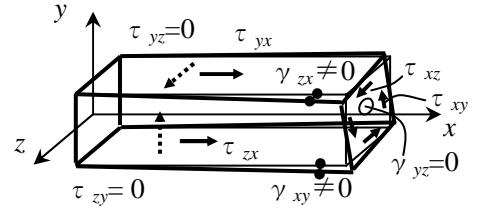


図-4.5 純ねじりにおけるせん断ひずみと応力

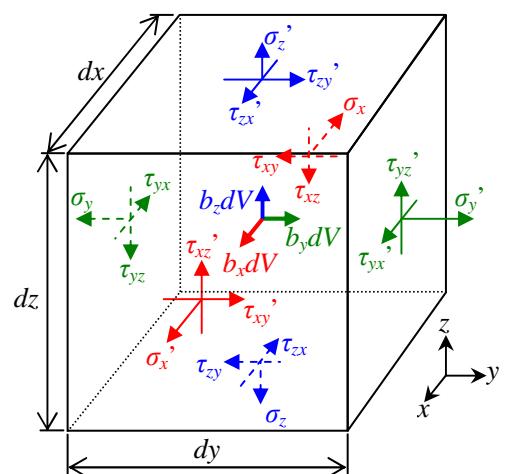


図-4.6 3次元弾性体中の微小要素に作用する応力

$$G\vartheta\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 0\right) + G\vartheta\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + 0\right) + 0 = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \cdots \cdots (4.21)$$

そり関数 $U(y, z)$ は棒中のいかなる点においても、上記微分方程式を満足しなければならない。

次に、任意の断面の周縁におけるせん断応力の y 軸および z 軸方向のせん断応力 τ_{xy} ($= \tau_{yx}$)、 τ_{xz} ($= \tau_{zx}$) の適合条件を考える。これらが図-4.7 のように生じるものとする。図-4.8 に示す、周縁上には表面力が作用していないので、これらの応力の合力は周縁において接線方向に向かねばならない。作用点における周縁の法線 n の方向余弦を (l, m) とすれば、周縁に垂直方向のせん断応力 τ_{xn} は以下となるが表面力がないのでこれが 0 となる。

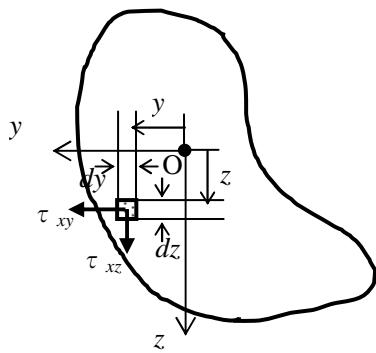


図-4.7 断面内の微小要素のせん断応力

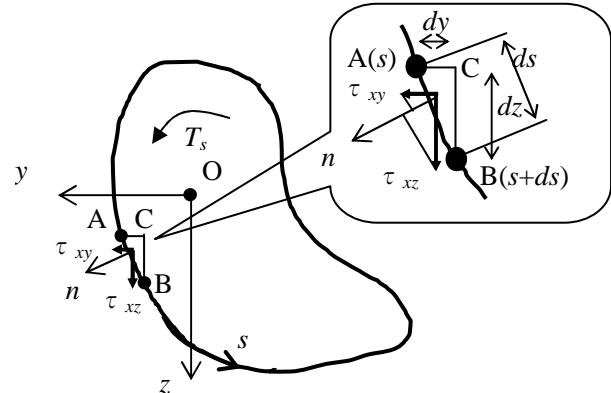


図-4.8 周縁のせん断応力

$$\tau_{xn} = \tau_{xy}l + \tau_{xz}m = 0 \cdots \cdots (4.22)$$

周縁に沿って曲線座標 s を設ける。周縁上の点 A からねじりモーメントの方向に B へ進んだ時、曲線座標が s から $s+ds$ に変化したとする。また点 A の直交座標を (y, z) とすれば、点 B のそれは $(y+dy, z+dz)$ である。A, B よりそれぞれ y 軸、 z 軸に平行線を引き交点を C とすると

$$BC = dz, AC = -dy, AB = ds$$

である。よって、

$$l = \frac{BC}{AB} = \frac{dz}{ds}, \quad m = \frac{AC}{AB} = -\frac{dy}{ds} \cdots \cdots (4.23)_{1,2}$$

これらを式(4.22)に代入すると、

$$\tau_{xn} = \tau_{xy}l + \tau_{xz}m = \tau_{xy} \frac{dz}{ds} - \tau_{xz} \frac{dy}{ds} = 0 \cdots \cdots (4.24)$$

式(4.14)_{5,6} の関係を代入して、

$$G\vartheta\left(\frac{\partial U}{\partial y} - z\right)\frac{dz}{ds} - G\vartheta\left(\frac{\partial U}{\partial z} + y\right)\frac{dy}{ds} = 0$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y} - z\right)\frac{dz}{ds} - \left(\frac{\partial U}{\partial z} + y\right)\frac{dy}{ds} = 0 \cdots \cdots (4.25)$$

そり関数 U は周縁上のあらゆる点で条件式(4.25)を満足し、しかも棒体内のあらゆる点で微分方程式(4.21)を満足しなければならない。 U は y, z のみの関数であるから 2 次元問題として、領域内で式(4.21)のラプラス方程式を満足し、式(4.25)で表せられる境界条件をその周縁で満足する解に他ならない。

応力のつり合い式の第2式(4.18)は、(4.14)₂から $\sigma_y = 0$ 、(4.14)₄から $\tau_{yz} = 0$ 、体積力は無く、 $b_y = 0$ として、

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = 0 \rightarrow 0 + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + 0 + 0 = 0 \rightarrow \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = 0$$

せん断応力の共役性から $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \cdots \cdots (4.26)$

応力のつり合い式の第3式(4.19)は、(4.14)₃から $\sigma_z = 0$ 、(4.14)₄から $\tau_{yz} = 0$ 、体積力は無く、 $b_z = 0$ として、

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + b_z = 0 \rightarrow 0 + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + 0 + 0 = 0 \rightarrow \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = 0$$

せん断応力の共役性から $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0 \cdots \cdots (4.27)$

応力のつり合い式の第1式(4.17)について、(4.14)₁から $\sigma_x = 0$ 、体積力が無く、 $b_x = 0$ として、

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_x = 0 \rightarrow 0 + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + 0 = 0 \rightarrow \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

せん断応力の共役性から $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \cdots \cdots (4.28)$

という断面上のせん断応力に関する関係式が得られる。

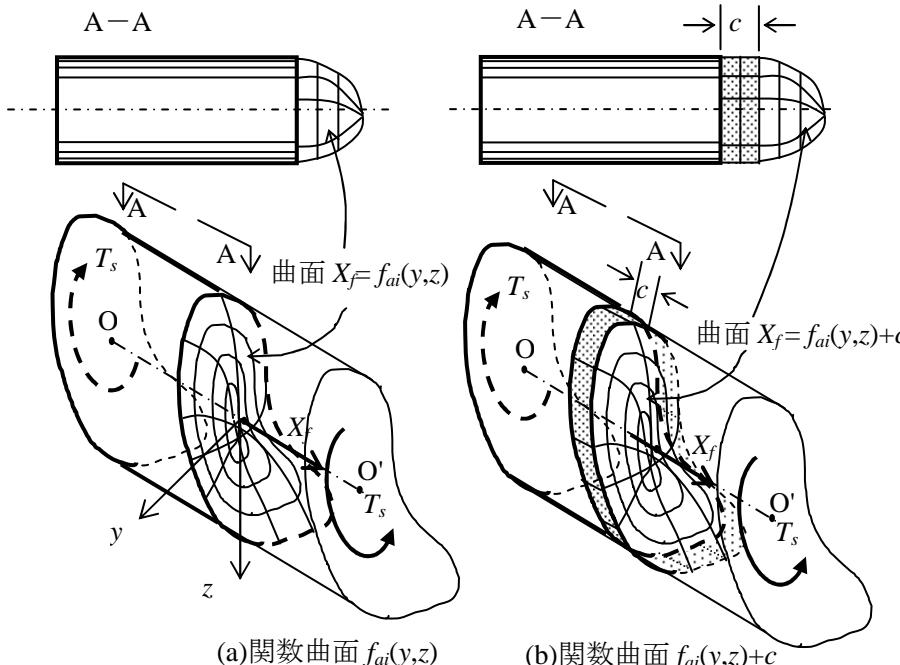


図-5.1 応力関数 $f_{ai}(y,z)$ の曲面

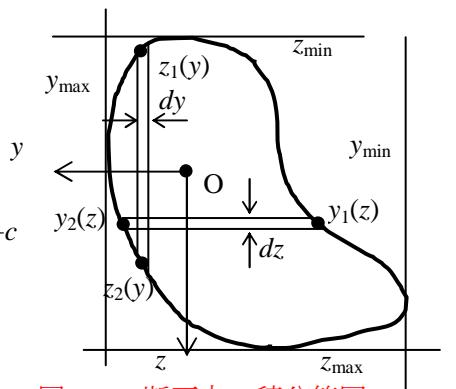


図-5.2 断面内の積分範囲

2.5 ねじり問題の応力関数

式(4.14)_{5,6}におけるそり関数 U は y, z のみの関数であり、断面上のせん断応力 τ_{xy} と τ_{xz} は x に無関係である。すなわち棒中の軸方向の任意断面で常に同じである。ここで図-5.1 に示す応力関数 $f_{ai}(y,z)$ を導入する。 f_{ai} と断面上のせん断応力 τ_{xy} と τ_{xz} に以下の関係があるものとする。

$$\frac{\partial f_{ai}}{\partial z} = \tau_{xy}, \quad -\frac{\partial f_{ai}}{\partial y} = \tau_{xz} \cdots \cdots (5.1)_{1,2}$$

f_{ai} は y, z のみの関数であるから、式(4.26), (4.27) で表される x に関する偏導関数は以下より満足される。

$$\text{式(4.26)} \rightarrow \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f_{ai}}{\partial z} = 0 \cdots \cdots (5.2)_1$$

$$\text{式(4.27)} \rightarrow \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial f_{ai}}{\partial y} \right) = 0 \cdots \cdots (5.2)_2$$

また、式(4.28)については式(5.1)_{1,2}を代入して満足されることが確認される。

$$\text{式(4.28)} \rightarrow \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f_{ai}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f_{ai}}{\partial y} = \frac{\partial^2 f_{ai}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f_{ai}}{\partial y \partial z} = 0 \cdots \cdots (5.2)_3$$

式(4.14)₅ と (5.1)₁ また、式(4.14)₆ と (5.1)₂ をそれぞれ等置して、

$$\tau_{xy} = G \vartheta \left(\frac{\partial U}{\partial y} - z \right) = \frac{\partial f_{ai}}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = G \vartheta \left(\frac{\partial U}{\partial z} + y \right) = -\frac{\partial f_{ai}}{\partial y} \cdots \cdots (5.3)_{1,2}$$

式(5.3)₁ を z で微分、式(5.3)₂ を y で微分し、これらを用いて U を消去する。

$$G \vartheta \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - 1 \right) = \frac{\partial^2 f_{ai}}{\partial z^2}, \quad G \vartheta \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} + 1 \right) = -\frac{\partial^2 f_{ai}}{\partial y^2} \cdots \cdots (5.4)_{1,2}$$

式(5.4)₁ と (5.4)₂ を辺々差し引くと、

$$-G \vartheta - (G \vartheta) = -2G \vartheta = \frac{\partial^2 f_{ai}}{\partial z^2} - \left(-\frac{\partial^2 f_{ai}}{\partial y^2} \right) \rightarrow \frac{\partial^2 f_{ai}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_{ai}}{\partial z^2} = -2G \vartheta \cdots \cdots (5.5)$$

一方、境界条件について式(4.24)に (5.1)_{1,2} を代入して、

$$0 = \tau_{xy} \frac{dz}{ds} - \tau_{xz} \frac{dy}{ds} = \frac{\partial f_{ai}}{\partial z} \frac{dz}{ds} - \left(-\frac{\partial f_{ai}}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) = \frac{\partial f_{ai}}{\partial z} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial f_{ai}}{\partial y} \frac{dy}{ds} \cdots \cdots (5.6)$$

f_{ai} が y, z のみの関数であることを考慮すると全微分公式から、

$$\frac{\partial f_{ai}}{\partial s} = 0 \cdots \cdots (5.7)$$

このことは f_{ai} が周縁に沿って一定値をとることを表している。

ここに、 f_{ai} はねじりの問題における応力関数といわれる。この式は式(5.5)で表されるポアソン方程式を満足し、周縁で一定値をとる関数として f_{ai} が求められる。ここで一定値 c として 0 を選んでも応力の解に対して一般性を失わない。このことは次のように解釈される。

f_{ai} の導入過程より 断面上のせん断応力は f_{ai} を偏微分することによって式(5.1)_{1,2} のように求められる。

図-5.1 に f_{ai} の曲面形状を模式的に示す。(a) は一定値 $c=0$ とした場合、(b) は $c=c$ とした場合である。

ここで興味の対象としているのはせん断応力であり、これは f_{ai} の微分であるが(a) の $f_{ai}(y,z)$ と(b) の $f_{ai}(y,z) + c$ をそれぞれ微分した結果は同じであり、 c の有無には依存しない。

ところでねじりモーメント T_s は図-4.7 に示すようにせん断応力に微小面積をかけ腕に当たる y, z の値を乗じたものを断面内で積分したものにつりあうから、

$$T_s = \iint_A (-\tau_{xy} dy dz \cdot z + \tau_{xz} dy dz \cdot y) = \iint_A (-\tau_{xy} z + \tau_{xz} y) dy dz \cdots \cdots (5.8)$$

ここに、 \iint は全断面にわたって積分することを示す。式(5.1)_{1,2} を代入して、

$$T_s = \iint_A (-\tau_{xy}z + \tau_{xz}y) dy dz = \iint_A \left(-\frac{\partial f_{ai}}{\partial z} z - \frac{\partial f_{ai}}{\partial y} y \right) dy dz = -\iint_A \left(\frac{\partial f_{ai}}{\partial z} z + \frac{\partial f_{ai}}{\partial y} y \right) dy dz \cdots \cdots (5.9)$$

図-5.2 を参照しつつ、部分積分を行うと、

$$T_s = -\iint_A \frac{\partial f_{ai}(y, z)}{\partial z} z dy dz - \iint_A \frac{\partial f_{ai}(y, z)}{\partial y} y dy dz \cdots \cdots (5.10)_1$$

$$\begin{aligned} &= -\left\{ \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} [f_{ai}(y, z) \cdot z]_{z_1(y)}^{z_2(y)} dy - \iint_A f_{ai}(y, z) dy dz \right\} - \left\{ \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} [f_{ai}(y, z) \cdot y]_{y_1(z)}^{y_2(z)} dz - \iint_A f_{ai}(y, z) dy dz \right\} \\ &= -\left\{ \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} f_{ai}(y, z_2(y)) \cdot z_2(y) dy - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} f_{ai}(y, z_1(y)) \cdot z_1(y) dy - \iint_A f_{ai}(y, z) dy dz \right\} \cdots \cdots (5.10)_2 \\ &\quad - \left\{ \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} f_{ai}(y_2(z), z) \cdot y_2(z) dz - \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} f_{ai}(y_1(z), z) \cdot y_1(z) dz - \iint_A f_{ai}(y, z) dy dz \right\} \end{aligned}$$

ここで周縁上で $f_{ai}=0$ を選んでいるので 6 項からなる上式中の 1, 2, 4, 5 項に含まれる $f_{ai}(y, z_2(y))$, $f_{ai}(y, z_1(y))$, $f_{ai}(y_2(z), z)$, $f_{ai}(y_1(z), z)$ はいずれも 0 である。従ってこれらの項は下記のとおり定積分を実施することで消滅する。結果的にねじりモーメント T_s は応力関数 f_{ai} を用いて以下のように表せられる。

$$\begin{aligned} T_s &= -\left\{ \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} 0 \cdot z_2(y) dy - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} 0 \cdot z_1(y) dy - \iint_A f_{ai}(y, z) dy dz \right\} \\ &\quad - \left\{ \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} 0 \cdot y_2(z) dz - \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} 0 \cdot y_1(z) dz - \iint_A f_{ai}(y, z) dy dz \right\} \\ &= -\left\{ \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} 0 dy - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} 0 dy - \iint_A f_{ai}(y, z) dy dz \right\} - \left\{ \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} 0 dz - \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} 0 dz - \iint_A f_{ai}(y, z) dy dz \right\} \\ &= -\left\{ (y_{\max} - y_{\min}) - (y_{\max} - y_{\min}) - \iint_A f_{ai}(y, z) dy dz \right\} - \left\{ (z_{\max} - z_{\min}) - (z_{\max} - z_{\min}) - \iint_A f_{ai}(y, z) dy dz \right\} \\ &= \left\{ \iint_A f_{ai}(y, z) dy dz \right\} + \left\{ \iint_A f_{ai}(y, z) dy dz \right\} = 2 \iint_A f_{ai}(y, z) dy dz \cdots \cdots (5.10)_3 \end{aligned}$$

ここで、式(5.8)と(5.10)₃ を比較すると式(5.9)の第 1, 第 2 項がいずれも $\iint_A f_{ai}(y, z) dy dz$ として計算され

ることから直交 2 方向のそれぞれのせん断応力に伴うモーメントが外力ねじりモーメント T_s の半分ずつを分担している。

ここで、応力関数 f_{ai} の解は以下のように関数 F を含む形で与えられるものと考える。

$$f_{ai}(y, z) = G \vartheta \cdot F(y, z) \cdots \cdots (5.11)$$

ここで左辺 f_{ai} はねじりモーメント T_s に比例するのに対して、右辺では G は定数、 ϑ は T_s に比例するので、結局 F は f_{ai} の T_s に比例する因子と定数項を除いた関数と考えられる。これを方程式(5.5)に代入すると、未知関数 F が次のポアソン方程式を満足しなければならないことが分かる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_{ai}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_{ai}}{\partial z^2} = -2G\vartheta &\rightarrow \frac{\partial^2 G\vartheta \cdot F(y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G\vartheta \cdot F(y, z)}{\partial z^2} = -2G\vartheta \\ &\rightarrow \frac{\partial^2 F(y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F(y, z)}{\partial z^2} = -2 \dots \dots (5.12) \end{aligned}$$

f_{ai} を周縁上で 0 に選んでいるため、式(5.11)から F も周縁上で 0 である。

式(5.11)を(5.10)に代入すれば、ねじり率 $\vartheta = d\phi/dx$ は

$$T_s = 2 \iint_A f_{ai}(y, z) dy dz = 2 \iint_A G\vartheta \cdot F(y, z) dy dz$$

$$\vartheta = \frac{T_s}{2G \iint_A F(y, z) dy dz} \dots \dots (5.13)$$

任意断面のねじりモーメント T_s とせん断弾性係数 G 、ねじり率 ϑ 、ねじり定数 J の関係は以下より、

$$T_s = GJ\vartheta \dots \dots (5.14)$$

$$J = \frac{T_s}{G\vartheta} = \frac{2 \iint_A f_{ai}(y, z) dy dz}{G\vartheta} \dots \dots (5.15)$$

また、せん断応力は式(5.1)_{1,2} に(5.11)、(5.13)を代入し、さらに式(5.13)は分母の重積分を完了させると、もはや y 、 z の関数ではなく数値となり、偏微分記号の外に出せるので、

$$\tau_{xy} = \frac{\partial f_{ai}}{\partial z} = \frac{\partial G\vartheta \cdot F}{\partial z} = G\vartheta \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{T_s}{2 \iint_A F(y, z) dy dz} \frac{\partial F(y, z)}{\partial z} \dots \dots (5.16)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial f_{ai}}{\partial y} = \frac{\partial G\vartheta \cdot F}{\partial y} = G\vartheta \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{T_s}{2 \iint_A F(y, z) dy dz} \frac{\partial F(y, z)}{\partial y} \dots \dots (5.17)$$

式(5.12)で表せられるポアソン方程式の解 $F(y, z)$ が求まれば、与えられたねじりモーメント T_s によって生じるねじり率 $\vartheta = d\phi/dx$ が式(5.13)より、またせん断応力 τ_{xy} 、 τ_{xz} が式(5.16)、(5.17)より算出できる。

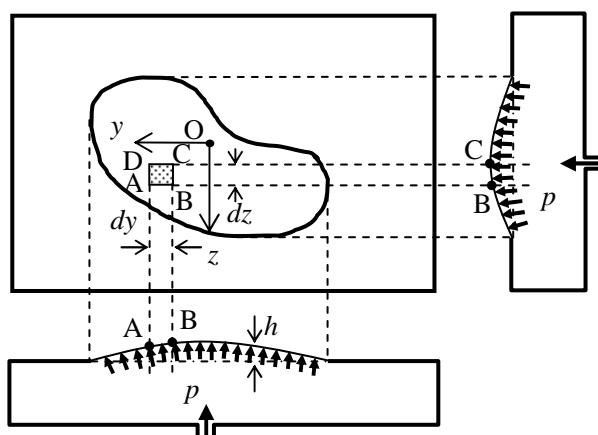


図-6.1 石鹼膜の変形

2.6 石鹼膜相似

図-6.1 に示す箱の蓋に任意形状の開口部を設け、そこに石鹼膜を張って、底部の管から圧力 p の空気圧を加える。この空気圧により石鹼膜が微小な膨らみ h を生じるようにする。変形前の平らな膜面内に直交座標軸 y, z をとる。これより h は y, z の関数 $h(y, z)$ となる。変形後、 y 軸、 z 軸に平行な微小長さ $dy \times dz$ を有する微小矩形膜要素に作用する膜張力 P_t と空気圧 p の関係を図-6.2 に示す。均一な圧力により膨らんだ石鹼膜の微小要素に作用する膜張力 P_t は全方向について均一で、その要素の中の $dy \times dz$ の部分を考えると、単位幅あたり水平張力 H は一定である。そこで y 軸方向縁(辺 AB と CD)および Z 軸方向縁(辺 BC と DA)に発生する鉛直力 Q_y および Q_z と内圧 p の鉛直方向のつり合いを考えると、

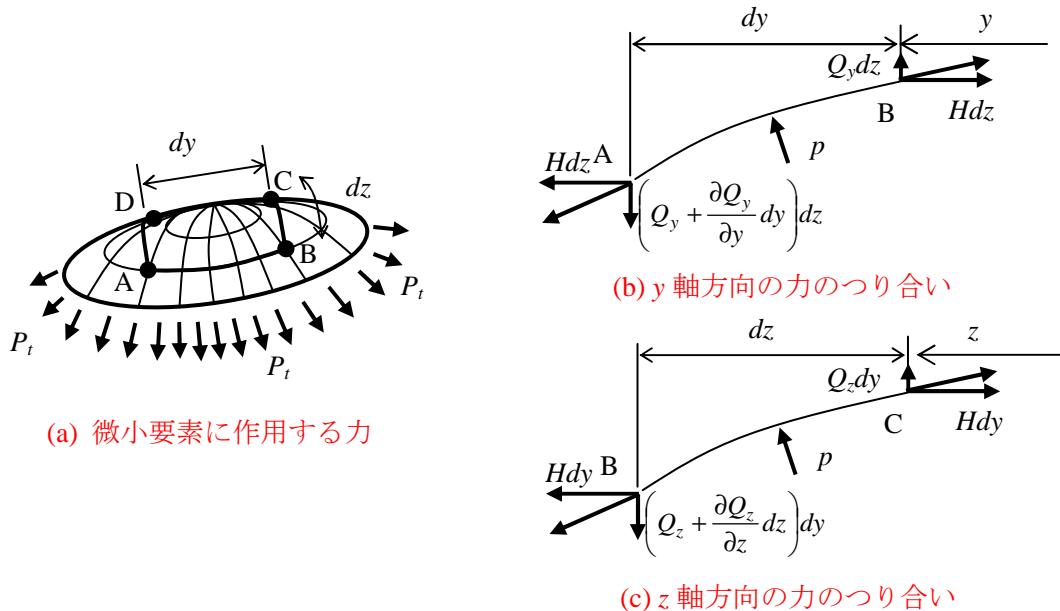


図-6.2 微小石鹼膜要素に作用する力

$$\left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy - Q_y \right) dz + \left(Q_z + \frac{\partial Q_z}{\partial z} dz - Q_z \right) dy - pdzdy = 0 \cdots \cdots (6.1)$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dz + \frac{\partial Q_z}{\partial z} dz dy - pdzdy = 0$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} - p = 0 \cdots \cdots (6.2)$$

ここで、内圧 p の作用方向は膜面に対して法線方向であるが、膜面の水平面に対する傾斜は微小であるので法線方向の力は鉛直方向の力と等しいと考えられる。

任意点の y 方向の膜の傾斜は、 $\frac{\partial h}{\partial y} \cdots \cdots (6.3)$

力のベクトルを考えると Q_y と H の比がこの傾斜に等しくなり、B 点での H の方向が負方向であるので、

$$\frac{Q_y}{H} = -\frac{\partial h}{\partial y} \cdots \cdots (6.4)_1$$

$$\text{従って, } Q_y = -H \frac{\partial h}{\partial y} \cdots \cdots (6.4)_2$$

$$\text{同様に } Z \text{ 方向については, } Q_z = -H \frac{\partial h}{\partial z} \cdots \cdots (6.5)$$

式(6.4)₂, (6.5)を式(6.2)に代入すると,

$$-H \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - H \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - p = 0$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = -\frac{p}{H} \cdots \cdots (6.6)$$

膜の膨らみ $h(y, z)$ は式(6.6)のポアソン方程式を領域内で満足し, 境界で $h = 0$ を満足する関数である。式(6.6)およびその境界条件は, 式(5.5)で表せられる応力関数 f_{ai} に関する微分方程式および境界条件と相似である。両方程式の比較から明らかのように, 石鹼膜の膨らみ h と応力関数 f_{ai} の間には以下の関係がある。ラプラスの演算子 Δ を用いて式(5.5), (6.6)を表記しなおすと,

$$\text{式(5.5)} \rightarrow \frac{\partial^2 f_{ai}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_{ai}}{\partial z^2} = -2G\vartheta \rightarrow \Delta f_{ai} = -2G\vartheta \cdots \cdots (6.7)$$

$$\text{式(6.6)} \rightarrow \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = -\frac{p}{H} \rightarrow \Delta h = -\frac{p}{H} \cdots \cdots (6.8)$$

これらより

$$\Delta f_{ai} \frac{1}{2G\vartheta} = \Delta h \frac{H}{p} = -1 \rightarrow f_{ai} \frac{1}{2G\vartheta} = h \frac{H}{p} \cdots \cdots (6.9)$$

よって,

$$f_{ai}(y, z) = 2G\vartheta \frac{H}{p} h(y, z) \cdots \cdots (6.10)$$

上式を式(5.1)_{1,2}に代入すれば,

$$\tau_{xy} = \frac{\partial f_{ai}}{\partial z} = 2G\vartheta \frac{H}{p} \frac{\partial h}{\partial z} \cdots \cdots (6.11)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial f_{ai}}{\partial y} = -2G\vartheta \frac{H}{p} \frac{\partial h}{\partial y} \cdots \cdots (6.12)$$

式(6.11), (6.12)はねじりに伴うせん断応力は, 膜面の傾斜で与えられることを示している。

また, 式(6.10)を(5.10)₃に代入すれば,

$$T_s = 2 \iint_A f_{ai}(y, z) dy dz = 2 \iint_A 2G\vartheta \frac{H}{p} h(y, z) dy dz = 4G\vartheta \frac{H}{p} \iint_A h(y, z) dy dz \cdots \cdots (6.13)$$

最右辺の重積分値は石鹼膜の膨らみの全体積 V に等しい。式(6.13)に V を代入すると, ねじりモーメント T_s が与えられたとき, ねじり率 $\vartheta = d\phi/dx$ は次式で与えられる。

$$T_s = 4G\vartheta \frac{H}{p} V$$

$$\vartheta = \frac{p}{4GVH} T_s \cdots \cdots (6.14)$$

以上のような取扱いを Prandtl の石鹼膜相似と呼ぶ。

2.7 丸棒の例

任意形状の等断面棒のねじり問題では、周縁で 0 となり、偏微分方程式(5.5)を満足する応力関数 f_{ai} の解を求めるに帰着する。ところで円断面の場合には、方程式を 2 次元直交座標系から極座標系に変換する方が都合がよい。この場合、付録—2.B に従い基礎方程式は、式(5.5)を極座標表示して、

$$\text{式(5.5)} \rightarrow \frac{\partial^2 f_{ai}(y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_{ai}(y, z)}{\partial z^2} = -2G\vartheta \rightarrow \frac{\partial^2 f_{ai}(r, \theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_{ai}(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f_{ai}(r, \theta)}{\partial \theta^2} = -2G\vartheta \cdots \cdots (7.1)$$

2 次元の微分公式と式(B.1)_{1~3}, (B.2)_{1~3} を用いて、

$$\frac{\partial f_{ai}}{\partial r} = \frac{\partial f_{ai}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f_{ai}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f_{ai}}{\partial y} \cos \theta + \frac{\partial f_{ai}}{\partial z} \sin \theta \cdots \cdots (7.2)$$

$$\frac{\partial f_{ai}}{\partial \theta} = \frac{\partial f_{ai}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f_{ai}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \theta} = -\frac{\partial f_{ai}}{\partial y} r \sin \theta + \frac{\partial f_{ai}}{\partial z} r \cos \theta \rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial f_{ai}}{\partial \theta} = -\frac{\partial f_{ai}}{\partial y} \sin \theta + \frac{\partial f_{ai}}{\partial z} \cos \theta \cdots \cdots (7.3)$$

これらに式(5.1)_{1,2} を代入する。 (5.1)_{1,2} を再記すると、

$$\text{式(5.1)}_{1,2} \rightarrow \frac{\partial f_{ai}}{\partial z} = \tau_{xy}, \quad -\frac{\partial f_{ai}}{\partial y} = \tau_{xz} \cdots \cdots (7.4)_{1,2}$$

$$\text{式(7.2)} \rightarrow \frac{\partial f_{ai}}{\partial r} = -\tau_{xz} \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta = -\tau_{x\theta} \cdots \cdots (7.5)$$

$$\text{式(7.3)} \rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial f_{ai}}{\partial \theta} = \tau_{xz} \sin \theta + \tau_{xy} \cos \theta = \tau_{xr} \cdots \cdots (7.6)$$

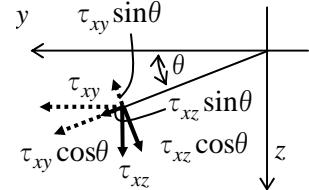


図-7.1 せん断応力の極座標表示

ここに、 $\tau_{x\theta}$: 丸棒断面内の極座標系の円周方向に生じるせん断応力、 τ_{xr} : 半径方向のせん断応力これらのせん断応力の大きさ関係を図-7.1 に示す。

丸棒のねじりにおいては式(1.5)で示したように、せん断応力 τ は円周方向にのみ生じ、その値は r のみの関数である。このことは極座標表示では $\tau_{xr}=0$, $\tau_{x\theta}=\tau$ であることを意味している。 $\tau_{x\theta}=\tau$ を式(7.6)に用いて θ で偏微分すると下記となる。

$$\frac{\partial^2 f_{ai}}{\partial \theta^2} = 0 \cdots \cdots (7.7)$$

これを式(7.1)に代入すると、

$$\frac{\partial^2 f_{ai}(r, \theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_{ai}(r, \theta)}{\partial r} = -2G\vartheta \cdots \cdots (7.8)$$

式(6.10)を極座標表示にすると、

$$\text{式(6.10)} \rightarrow f_{ai}(y, z) = 2G\vartheta \frac{H}{p} h(y, z)$$

$$f_{ai}(r, \theta) = 2G\vartheta \frac{H}{p} h(r, \theta) \cdots \cdots (7.9)$$

これを式(7.8)に代入すると、

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} 2G\vartheta \frac{H}{p} h(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} 2G\vartheta \frac{H}{p} h(r, \theta) = -2G\vartheta \cdots \cdots (7.10)$$

従って、石鹼膜相似では上式の両辺に $p/(2HG\vartheta)$ を乗じて、

$$\frac{d^2}{dr^2}h + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}h = -\frac{p}{H} \dots\dots(7.11)$$

上記 r に関する微分方程式を $r=R$ において $h=0$ なる境界条件のもとに解くと 下記となる.

$$h = \frac{R^2}{4} \frac{p}{H} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\} \dots\dots(7.12)$$

式(7.12)を微分して式(7.11)の微分方程式を満足することを確認する.

$$\frac{dh}{dr} = -\frac{R^2}{4} \frac{p}{H} \frac{2r}{R^2} = -\frac{r}{2} \frac{p}{H} \dots\dots(7.13)$$

$$\frac{d^2h}{dr^2} = -\frac{1}{2} \frac{p}{H} \dots\dots(7.14)$$

以上を式(7.11)左辺に代入すると,

$$\frac{d^2}{dr^2}h + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}h = -\frac{1}{2} \frac{p}{H} - \frac{1}{r} \frac{p}{2} \frac{H}{H} = -\frac{p}{H} \rightarrow (7.11)$$

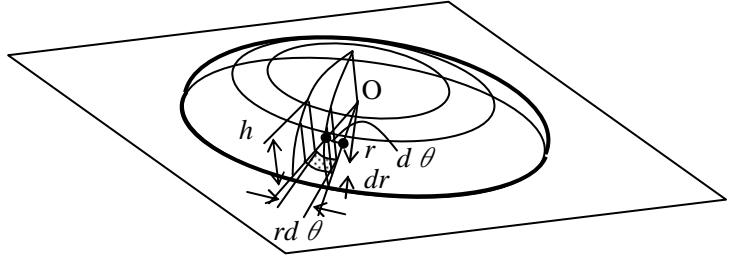


図-7.2 極座標表示の体積積分

即ち式(7.12)は式(7.11)の解であることが確認できる.

また、境界条件については $r=R$ として下記から周縁で 0 が確認される.

$$h = \frac{R^2}{4} \frac{p}{H} \left\{ 1 - \left(\frac{R}{R} \right)^2 \right\} = 0 \dots\dots(7.15)$$

また、式(7.12)より、石鹼膜の断面形状は放物線であることが分かる.

式(7.12)を式(7.9)に用いて、

$$f_{ai}(r, \theta) = 2G\vartheta \frac{H}{p} h(r, \theta) = 2G\vartheta \frac{H}{p} \frac{R^2}{4} \frac{p}{H} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\} = G\vartheta \frac{R^2}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\} \dots\dots(7.16)$$

式(7.5)よりせん断応力は、

$$\tau_{x\theta} = -\frac{\partial f_{ai}}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} G\vartheta \frac{R^2}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\} = -G\vartheta \frac{R^2}{2} \left\{ 0 - 2 \left(\frac{r}{R^2} \right) \right\} = G\vartheta r = Gr \frac{d\phi}{dx} \dots\dots(7.17)$$

上記は式(1.5)と一致する。また、石鹼膜の膨らみの全体積 V は図-7.2 を参照して、

$$\begin{aligned} V &= \int_0^R \int_0^{2\pi} h \cdot rd\theta dr = \int_0^R h \cdot r[\theta]_0^{2\pi} dr = \int_0^R h \cdot 2\pi r dr = \int_0^R \frac{R^2}{4} \frac{p}{H} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\} \cdot 2\pi r dr \\ &= \frac{\pi R^2}{2} \frac{p}{H} \int_0^R \left\{ r - \frac{r^3}{R^2} \right\} dr = \frac{\pi R^2}{2} \frac{p}{H} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right]_0^R = \frac{\pi R^2}{2} \frac{p}{H} \frac{R^2}{4} = \frac{\pi R^4}{8} \frac{p}{H} \dots\dots(7.18) \end{aligned}$$

式(6.13)の二重積分の結果が上記 V に相当するので、ねじりモーメント T_s は、

$$T_s = 4G\vartheta \frac{H}{p} \iint_A h(y, z) dy dz = 4G\vartheta \frac{H}{p} V = 4G\vartheta \frac{H}{p} \frac{\pi R^4}{8} \frac{p}{H} = \frac{\pi R^4}{2} G\vartheta = \frac{\pi R^4}{2} G \frac{d\phi}{dx} \dots\dots(7.19)$$

上記は式(1.7)に一致する。

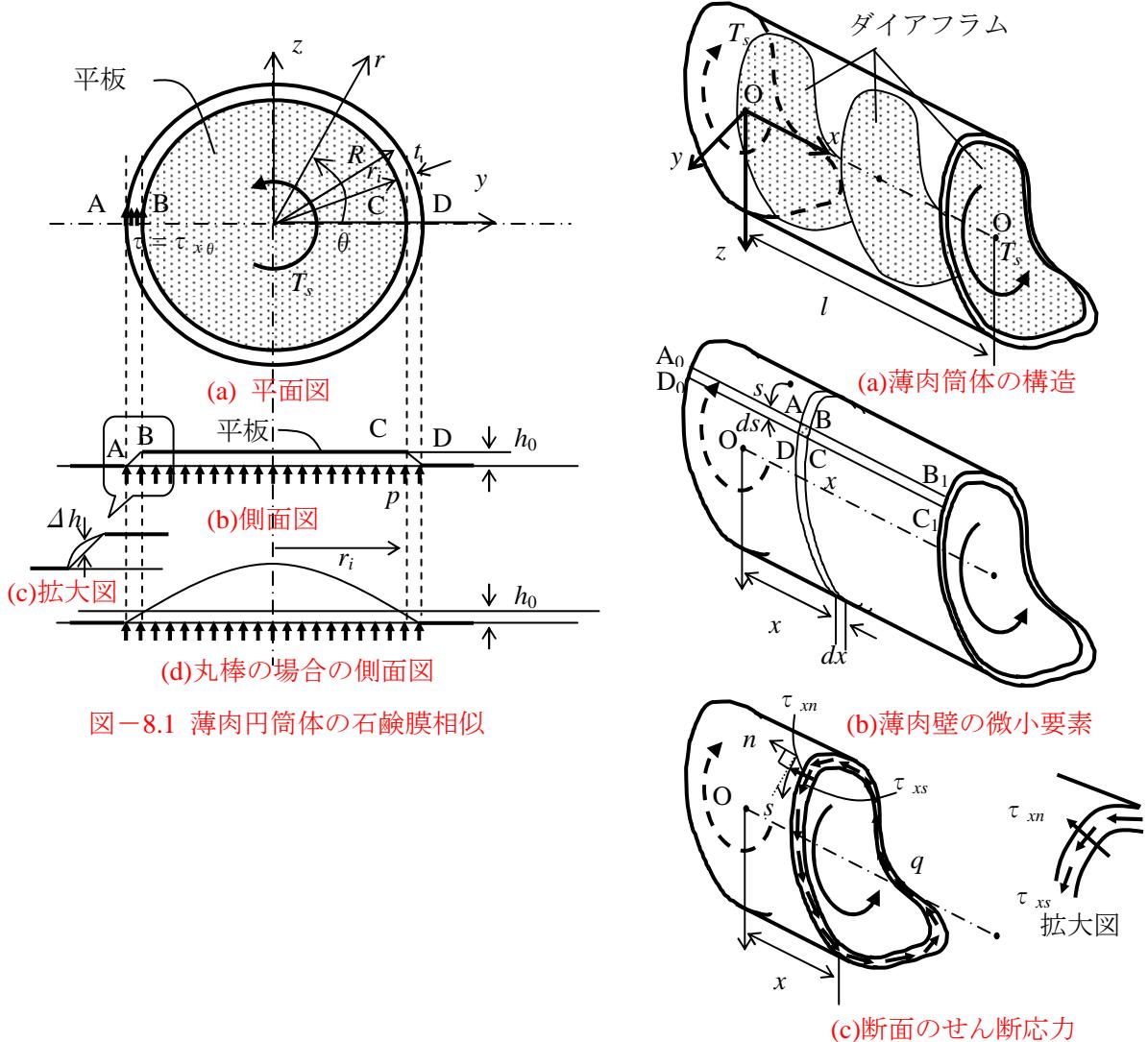


図-8.1 薄肉円筒体の石鹼膜相似

2.8 薄肉円筒体の例

薄肉円筒体に対しても石鹼膜相似が利用できる。半径 r_i の内周縁において、周縁に垂直、すなわち、半径方向のせん断応力 τ_{xr} は存在しない。これは式(7.6)から内縁において $\partial f_{ai} / \partial \theta = 0$ となることを意味する。式(7.9)の両辺を微分すると以下となる。

$$\frac{\partial f_{ai}(r, \theta)}{\partial \theta} = 2G\vartheta \frac{H}{p} \frac{\partial h(r, \theta)}{\partial \theta} = 0$$

このことは、石鹼膜が内縁に沿って、 $\partial h / \partial \theta = 0$

すなわち、膜の高さ h が内縁に沿って一定値をとらねばならないことを意味している。

そこで図-8.1(a) に示すように円筒の中空部に対応して、それと同じ半径 r_i を有する平たい円板を外半径 R の円孔の中に同心円になるように置き、隙間に石鹼膜を張り、膨らますことによって、Prandtl の相似が成り立つことがわかる。その状態の断面図を図-8.1(b) に、端部の拡大図を(c) に示す。平板は高さ h_0 の一定値をとる。また、内縁を一周してどの地点においても $\partial h / \partial \theta = 0$ となることより円板は水平となる。2.7 節の丸棒に対する石鹼膜の状態を同図(d) に示す。同図(b) において膜の膨らみは、

溝の幅、すなわち薄肉断面の肉厚 t が小さいほど曲面の膨らみの少ない平面に近い傾斜面に近づく。同図(c)から分かるように、膜面の半径方向勾配が円周方向のせん断応力 $\tau_{x\theta}$ に比例する。 $\tau_{x\theta}$ が半径 r に比例して変化することが 2.2 節で示されている。このことから膜面は同図(c)のように、半径方向にはほとんど平らな放物線状に、円周方向には同じ r では同一の高さとなるように膨らむことが分かる。

膜面の高さ h は、式(7.12)で表され、従って応力関数 f_{ai} 、せん断応力 $\tau_{x\theta}$ も 2.7 節に示したのと同じ式で与えられる。また、石鹼膜の膨らみの全体積 V は図-8.1(a)から分かるように以下となる。

半径 r_i における h は式(7.12)の $r = r_i$ として、

$$h = \frac{R^2}{4} \frac{p}{H} \left\{ 1 - \left(\frac{r_i}{R} \right)^2 \right\} \dots \dots \dots \quad (8.1)$$

従って、溝の部分と高さ h が一定である半径 r_i の内側の部分の体積を個別に求め合計することにより、

$$V = \int_{r_i}^R \int_0^{2\pi} h \cdot r d\theta dr + \frac{R^2}{4} \frac{p}{H} \left\{ 1 - \left(\frac{r_i}{R} \right)^2 \right\} \pi r_i^2 \dots \dots \dots \quad (8.2)$$

$$= 2\pi \int_{r_i}^R \frac{R^2}{4} \frac{p}{H} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\} \cdot r dr + \frac{R^2}{4} \frac{p}{H} \left\{ 1 - \left(\frac{r_i}{R} \right)^2 \right\} \pi r_i^2$$

$$= \frac{\pi R^2}{2} \frac{p}{H} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right]_{r_i}^R + \frac{R^2}{4} \frac{p}{H} \left\{ 1 - \left(\frac{r_i}{R} \right)^2 \right\} \pi r_i^2$$

$$= \frac{\pi R^2}{2} \frac{p}{H} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4} - \frac{r_i^2}{2} + \frac{r_i^4}{4R^2} \right) + \frac{R^2}{4} \frac{p}{H} \left\{ 1 - \frac{r_i^2}{R^2} \right\} \pi r_i^2$$

$$= \pi \frac{p}{H} \left\{ \left(\frac{R^4}{8} - \frac{R^2 r_i^2}{4} + \frac{r_i^4}{8} \right) + \left(\frac{R^2 r_i^2}{4} - \frac{r_i^4}{4} \right) \right\}$$

$$= \frac{\pi p}{8H} (R^4 - r_i^4) \dots \dots \dots \quad (8.3)$$

ねじりモーメント T_s は式(7.19)と同様に、

$$T_s = 4G\vartheta \frac{H}{p} V = 4G\vartheta \frac{H}{p} \frac{\pi}{8} \frac{p}{H} (R^4 - r_i^4) = G\vartheta \frac{\pi}{2} (R^4 - r_i^4) = GI_P \frac{d\phi}{dx} \dots \dots \dots \quad (8.4)$$

上式は式(2.7)の結果と一致する。

2.9 任意形状の薄肉筒体の純ねじり

図-9.1(a)に示すような任意の断面形状を有する薄肉の中空筒体の純ねじりについて説明する。なお、2.18 節に任意形状に対してより単純な例として矩形薄肉筒体の説明をする。変形前の断面の形状は x に無関係にどの位置においても同断面とする。筒体の内部には適当な間隔に、筒体の内側に密着するリブ、対傾構あるいはダイアフラム等の補強材が設けられていて、ねじりが作用しても任意断面における断面形状の変化は無いものとする。また、これらの補強材は断面の軸方向の変形には抵抗しないものとする。

このような筒体の両端に大きさが相等しく方向が逆のねじりモーメント T_s が作用した場合には、2.4

節の任意断面の棒のねじりに関する式(4.5)からも推察されるように、ある断面の任意点の軸方向変位、そり u は断面の x 座標には無関係で他の断面でも同じであり、断面内の座標(y, z)のみの関数である。

そり u が x に無関係に一定であることは以下の微分式に当てはめると、軸方向の直ひずみ ϵ_x が存在しないということになる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 = \epsilon_x \cdots \cdots (9.1)$$

また、変形後の断面形状が変化しないことから、断面内の直ひずみも存在しない。

$$\epsilon_y = \epsilon_z = 0 \cdots \cdots (9.2)_{1,2}$$

これらのことから式(4.13)₁により断面の垂直応力 σ_x が存在しないことになる。

$$\text{式(4.13)₁} \rightarrow \sigma_x = \frac{E}{(1-2\nu)(1-\nu)} \{(1-\nu)\epsilon_x + \nu\epsilon_y + \nu\epsilon_z\} = \frac{E}{(1-2\nu)(1-\nu)} \{(1-\nu)0 + \nu0 + \nu0\} = 0 \cdots \cdots (9.3)$$

この結果、断面にはせん断応力 τ_{xs} , τ_{xn} のみが生じる。図-9.1(c) 拡大図を参照して、薄肉壁の周縁方向に s 座標、その法線方向に n 座標をとり、 τ_{xs} は薄肉壁の周縁に沿う方向のせん断応力、 τ_{xn} は薄肉壁の周縁法線方向のせん断応力である。この薄肉壁については平板の平面応力状態と同じように、薄肉壁の法線方向あるいは板厚方向の応力 τ_{xn} は極めて小さく、せん断応力は、板あるいは薄肉壁の方向の応力 τ_{xs} のみが卓越して生じる。そしてこの応力は板厚の中心線に平行に、ねじりモーメントと同じ向きに作用する。結果的にねじりを受けた薄肉筒体を任意の断面で切り出せば、せん断応力が図-9.1(c) のように作用することになる。

図-9.1(b) に示すように薄肉壁の微小要素 ABCD を取り出し、発生するせん断応力を検討する。取り出した微小要素の状況を図-9.2 に示す。微小距離 ds を隔てる 2 つの縦方向断面を AB, および DC とし、また、微小距離 dx を隔てる 2 つの断面を AD, および BC とする。厚さは ds の間で t_B から t_C に変化するものとする。変形前の断面の形状は x に無関係にどの断面においても同断面としたことから dx 方向に厚さは変化しない。

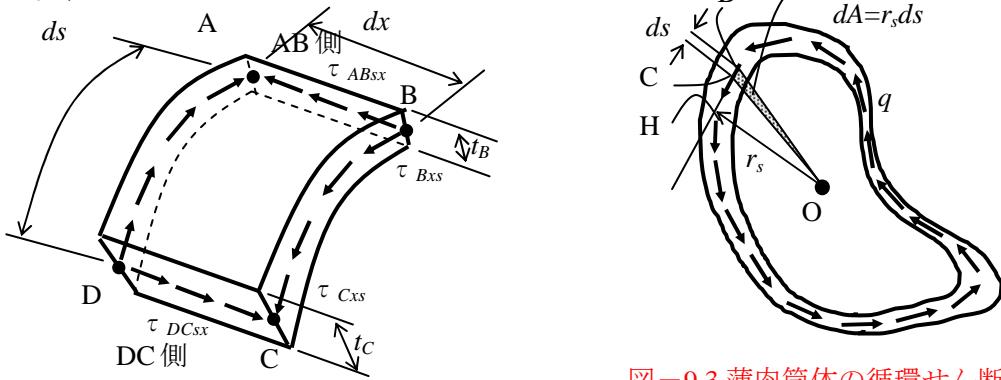


図-9.2 薄肉微小要素のせん断応力

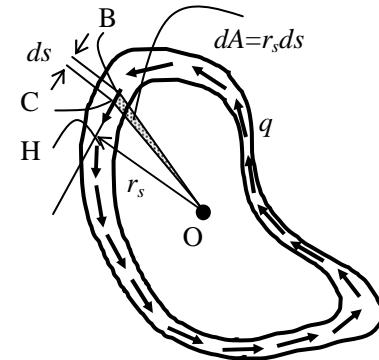


図-9.3 薄肉筒体の循環せん断流

既述のとおり x 方向の直応力 σ_x は存在せず、微小要素の x 方向の力のつり合いは以下となる。

$$\tau_{DCsx} \cdot t_C \cdot dx - \tau_{ABsx} \cdot t_B \cdot dx = 0 \rightarrow \tau_{ABsx} \cdot t_B = \tau_{DCsx} \cdot t_C \cdots \cdots (9.4)$$

ここに、 τ_{ABsx} と τ_{DCsx} はそれぞれ AB と DC に沿って発生するせん断応力である。等断面の純ねじりの問題ではねじり率 $\theta = d\phi/dx$ が x 方向に一定であるため、薄肉面内のせん断ひずみが一定となり、その結果これら応力 τ_{ABsx} と τ_{DCsx} は x 方向に変化しない。

次に BC に沿う断面上のせん断応力を考える。B および C の近傍における s 方向のせん断応力をそれぞれ τ_{Bxs} , τ_{Cxs} とすると別資料で説明する共役せん断応力の関係により以下が成立する。

$$\tau_{B_{sx}} = \tau_{AB_{sx}}, \quad \tau_{C_{sx}} = \tau_{DC_{sx}} \cdots \cdots (9.5)_{1,2}$$

この関係を式(9.4)に代入すると,

$$\tau_{B_{sx}} \cdot t_B = \tau_{C_{sx}} \cdot t_C \cdots \cdots (9.6)$$

この結果は薄肉筒体断面のいかなる点においてもその点に発生する s 方向のせん断応力 τ_{xs} と厚さ t の積は一定であることを示している。

以下, $q = \tau_{xs} \cdot t$ をせん断流と呼ぶ。せん断流は壁厚中心線に沿う単位長さ当たりの薄肉壁断面に作用するせん断応力の合応力である。この流れは薄肉筒体断面のいかなる点においても一定である。

$$q = \tau \cdot t \cdots \cdots (9.7)$$

次にせん断流 q とねじりモーメント T_s の関係を求める。図-9.3 に示す断面には壁厚中心線に沿ってせん断流が断面を一巡するように循環している。このようなせん断流を循環せん断流と呼ぶ。せん断流と一端に作用するねじりモーメントの間のつり合いを考える。断面の回転中心、すなわち、ねじりの中心 O の回りのモーメントのつり合いより

$$T_s = \oint q r_s ds \cdots \cdots (9.8)_1$$

ここに、図-9.3 に示すように ds は壁厚中心線の微小要素長, s は壁厚中心線に沿って設けた曲線座標, \oint は曲線座標に沿って一周する線積分, r_s は点 O から壁厚中心線の接線に下した垂線の長さ OH である。付録-2.C で説明するように s の進行方向に対して O が左側にあるとき $r_s > 0$, 右側のとき $r_s < 0$ とする。ところで図-9.3 より明らかなように, $r_s ds$ は微小要素長 BC と点 O を結ぶ微小三角形 OBC の面積 dA の 2 倍に等しい。また q は曲線座標 s に無関係に一定であるから積分記号の外に出る。従って,

$$T_s = q \oint r_s ds = 2q \oint dA \cdots \cdots (9.8)_2$$

ここで曲線座標に沿って一周すると $\oint dA$ は閉曲線である壁厚中心線によって囲まれる面積 A となる。

$$A = \oint dA \cdots \cdots (9.9)$$

上式を式(9.8)₂ に代入して下式が誘導される。

$$T_s = 2qA \rightarrow q = \frac{T_s}{2A} \cdots \cdots (9.10)_{1,2}$$

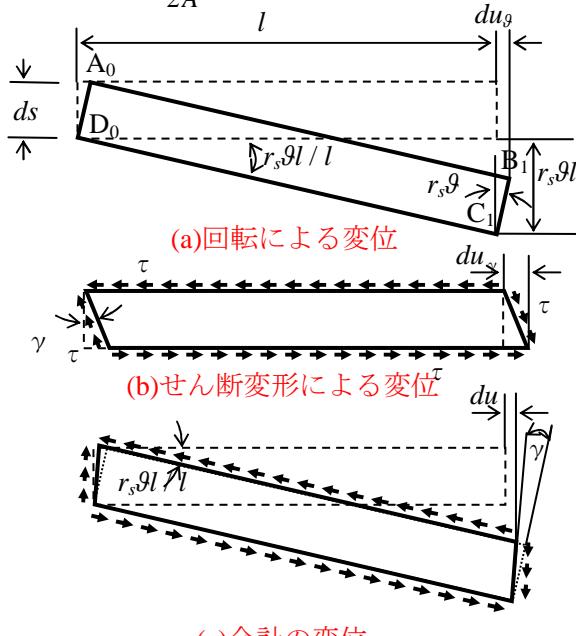


図-10.1 微小要素 $A_0B_1C_1D_0$ の変位 29

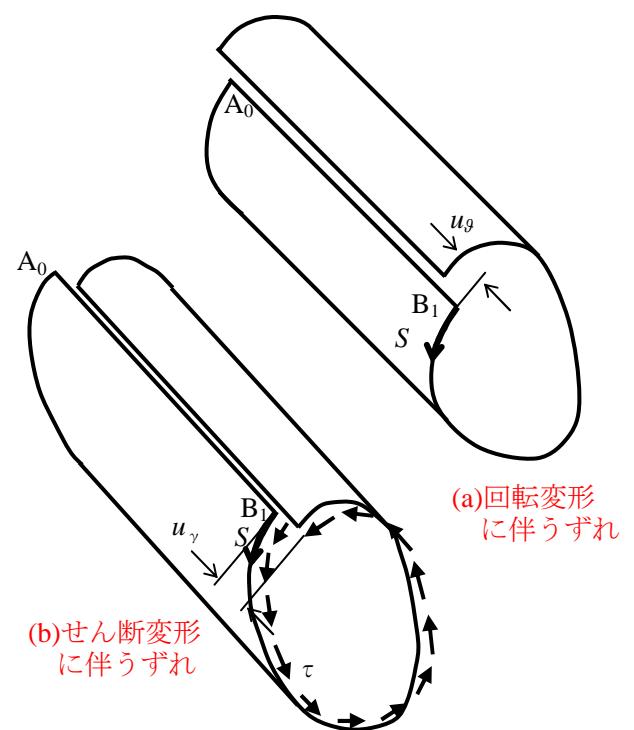


図-10.2 個別変形に伴うずれ

2.10 薄肉筒体の純ねじりにおける変形

再び図-9.1(b)に戻り、微小距離 ds だけ離れた 2 つの縦方向断面、 A_0B_1 と D_0C_1 で切り取られる長さ l の細長い微小要素について考える。辺 A_0D_0 の端面は辺 B_1C_1 の端面に対してねじり角 ϕ だけ相対回転角を生じる。等断面の純ねじり問題ではねじり率 $\theta = d\phi/dx$ は x 方向に一定でなければならないから、 $\phi = \vartheta \cdots \cdots (10.1)$

図-9.3 に示す r_s を用いて、辺 A_0D_0 は辺 B_1C_1 に対して $r_s\phi = r_s\theta l$ だけ、その辺に沿ってねじりの方向に変位を生じる。このとき微小要素 $A_0B_1 C_1D_0$ は図-10.1(a) のように

①点 B_1 を中心として角 $r_s\theta l/l = r_s\theta$ だけ回転する。

次に微小要素 $A_0B_1 C_1D_0$ は同図(b) に示すせん断応力 τ の発生により、

②せん断ひずみ $\gamma = \tau/G$ を生じる。

実際には 2 つの現象①、②が同時に起こり 同図(c) のように微小要素 $A_0B_1 C_1D_0$ は回転とせん断ひずみを伴う。

①により点 C_1 は点 B_1 に対して相対的に x 軸方向に以下だけ変位する。

$$du_\vartheta = -r_s\vartheta ds \cdots \cdots (10.2)$$

②により点 C_1 は点 B_1 に対して相対的に x 軸方向に以下だけ変位する

$$du_\gamma = \gamma ds = \frac{\tau}{G} ds \cdots \cdots (10.3)$$

従って、①と②の足し合わせによって点 C_1 の点 B_1 に対する相対変位は以下となる。

$$du = du_\vartheta + du_\gamma = -r_s\vartheta ds + \frac{\tau}{G} ds = -\left(r_s\vartheta - \frac{\tau}{G}\right) ds \cdots \cdots (10.4)$$

以上の変位について閉曲線を一周した場合を考える。①、②それぞれを点 B_1 を原点として考えた時、一周積分の結果、図-10.2 に示す食い違いが生じることになる。

①による食い違いは図-10.2(a) のように、

$$u_\vartheta = \oint du_\vartheta = -\oint r_s\vartheta ds \cdots \cdots (10.5)$$

②による食い違いは図-10.2(b) のように、

$$u_\gamma = \oint du_\gamma = \oint \frac{\tau}{G} ds \cdots \cdots (10.6)$$

実際には①、②の現象は同時に起こり、かつ B_1 において食い違いは生じないので式(10.5)、(10.6)の合計は 0 でなければならない。よって、

$$u_\vartheta + u_\gamma = -\oint r_s\vartheta ds + \oint \frac{\tau}{G} ds = 0 \cdots \cdots (10.7)$$

式(9.7)から $\tau = \frac{q}{t}$ の関係を上式代入し、ねじり率 θ とせん断流 q が座標 s に無関係に一定であるから、

$$-\oint r_s\vartheta ds + \oint \frac{\tau}{G} ds = -\vartheta \oint r_s ds + q \oint \frac{1}{tG} ds = 0 \cdots \cdots (10.8)$$

さらに式(9.8)₂、(9.9)で説明した以下の関係を用いると、

$$\oint r_s ds = 2 \oint dA = 2A \cdots \cdots (10.9)$$

$$-2\vartheta A + q \oint \frac{1}{tG} ds = 0$$

$$\vartheta = \frac{q}{2A} \oint \frac{1}{tG} ds \cdots \cdots (10.10)$$

上式に式(9.10)₂を代入すると,

$$\vartheta = \frac{T_s}{2A} \frac{1}{2A} \oint \frac{1}{tG} ds = \frac{T_s}{4A^2} \oint \frac{1}{tG} ds \cdots \cdots (10.11)_1$$

上記を Bredt-Batho の公式と呼ぶ.

式(5.14)より, $T_s = GJ\vartheta$ の関係を上式に代入すると,

$$J = \frac{4A^2}{\oint \frac{1}{t} ds} \cdots \cdots (10.11)_2$$

また曲線座標上の s 点におけるそり u は式(10.4)を積分して,

$$u = \int_0^s du = u_0 + \int_0^s du_\vartheta + \int_0^s du_\gamma = u_0 + \int_0^s -r_s \vartheta ds + \int_0^s \frac{\tau}{G} ds = u_0 - \vartheta \int_0^s r_s ds + q \int_0^s \frac{1}{tG} ds \cdots \cdots (10.12)$$

式(10.12)によって任意点のそり u がその点の座標値 s の関数として与えられる. 式(10.12)に含まれる u_0 は曲線座標 s の原点, $s = 0$ におけるそりを表している. なお, 断面の形状に対称性がある場合は対称軸と薄肉壁中心線との交点を $s = 0$ に選ぶと $u_0 = 0$ となる. 同一材料から成る場合には,せん断弾性係数 G は一定であるから式(10.10), (10.11)₁, (10.12)において積分記号の外に出すことができる. また, 壁厚が全周長にわたって一定であれば式(10.10), (10.11)₁, (10.12)に含まれる線積分は全周長 s_o になるのでそれぞれ次式が成り立つ.

$$\vartheta = \frac{q}{2AtG} \oint ds = \frac{qs_o}{2AtG} \cdots \cdots (10.13)$$

$$\vartheta = \frac{T_s}{4A^2 tG} \oint ds = \frac{T_s s_o}{4A^2 tG} \cdots \cdots (10.14)$$

$$u = u_0 - \vartheta \oint r_s ds + q \oint \frac{1}{tG} ds = u_0 - 2\vartheta A + \frac{qs_o}{tG} \cdots \cdots (10.15)$$

一般に最初平面であった断面は式(10.12)で与えられるそり u を生じるため, 座標 s の方向に勾配をもち, その値は以下から求まる.

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} u_0 - \vartheta \frac{\partial}{\partial s} \int_0^s r_s ds + q \frac{\partial}{\partial s} \int_0^s \frac{1}{tG} ds = 0 - \vartheta r_s + \frac{q}{tG} = -\vartheta r_s + \frac{q}{tG} \cdots \cdots (10.16)$$

板厚が一定の一辺 $2r_s$ の薄肉正方形断面では, $s_o = 8r_s$, $A = 4r_s^2$ であり, これを式(10.13)に代入すると

$$\vartheta = \frac{qs_o}{2AtG} = \frac{q \cdot 8r_s}{2 \cdot 4r_s^2 tG} = \frac{q}{r_s tG} \cdots \cdots (10.17)$$

上式を式(10.16)に代入すると

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -\vartheta r_s + \frac{q}{tG} = -\frac{q}{r_s tG} r_s + \frac{q}{tG} \equiv 0 \cdots \cdots (10.18)$$

上式は, そり u の座標 s 方向への勾配が無いことを示しており, 板厚一定の薄肉正方形断面においては断面にそりが生じることなく, 最初の平面が保持されることを表す.

各壁ごとに厚さが一定の t_i を有し、同一材料からなる薄肉多角形閉断面の場合には各壁の断面内の板幅を s_i とすると式(10.11)₁ から次式が得られる。この式は Bredt-Batho の式と呼ばれる。

$$\vartheta = \frac{T_s}{4A^2} \oint \frac{1}{tG} ds = \frac{T_s}{4A^2 G} \sum_{i=1}^k \frac{s_i}{t_i} \cdots \cdots (10.19)_1$$

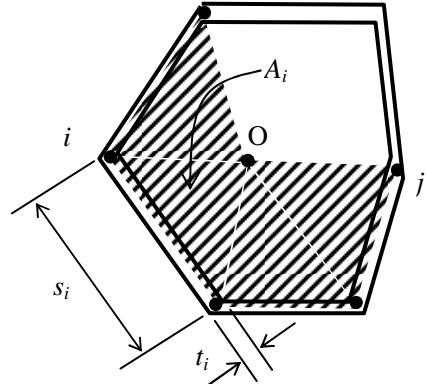
式(5.14)より、 $T_s = GJ\vartheta$ の関係を式(10.19)₁ に代入すると、 $J = \frac{4A^2}{\sum_{i=1}^k \frac{s_i}{t_i}}$ $\cdots \cdots (10.19)_2$

ここに、 Σ は断面を構成するすべての辺 $i = 1 \sim k$ について総和することを意味する。

また、ある格点 j におけるそり u_j は式(10.12)を用いて、

$$u_j = u_0 - \vartheta \int_0^{s_j} r_s ds + q \int_0^{s_j} \frac{1}{tG} ds = u_0 - 2\vartheta \sum_{i=1}^j A_i + \frac{q}{G} \sum_{i=1}^j \frac{s_i}{t_i} \cdots \cdots (10.20)$$

ここに、図-10.3 に示すように、 ΣA_i はねじり中心 O と隅角点 $s=0$ および j を結ぶ線分と薄肉中心線で囲まれる斜線で示す部分の面積である。また、 $\Sigma s_i/t_i$ は格点 $s=0$ から j に至る間の全ての壁について総和することを意味する



2.11 薄肉筒体の純ねじりの計算例

図-10.3 折れ板閉断面構造

図-11.1 に示す中空の箱断面あるいは薄肉折れ板矩形閉断面構造にねじり力 $T_s = 2.4 \cdot 10^9 \text{ Nmm}$ が作用する時のせん断流 q 、せん断応力 τ 、ねじり率 ϑ 、相対ねじれ角 ϕ を求める。以下単位は全て rad, mm, N とする。フランジの張り出しあは無視して、左右のウェブ間隔が 1,500, 上下のフランジ間隔が 1,000 とする。フランジとウェブは溶接で強固に接合されており、部材長 L は 10,000 とする。せん断弾性係数 G は $7.7 \cdot 10^7 \text{ N/mm}^2$ とする。図-11.2 に示すとおり板構成は以下とする。

上フランジ板厚 $t_t = 15$, 幅 $b_t = 1,500$

下フランジ板厚 $t_b = 10$, 幅 $b_b = 1,500$

ウェブ板厚 $t_w = 8$, 幅 $b_w = 1,000$

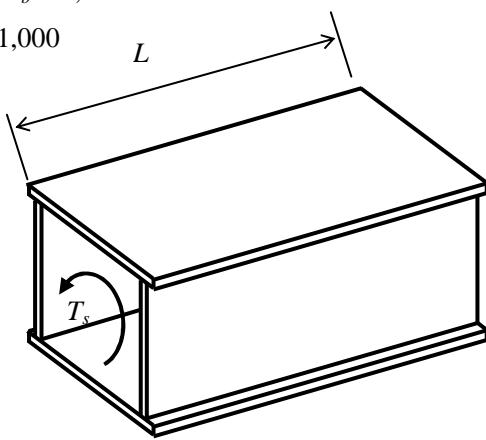


図-11.1 薄肉折れ板箱断面部材

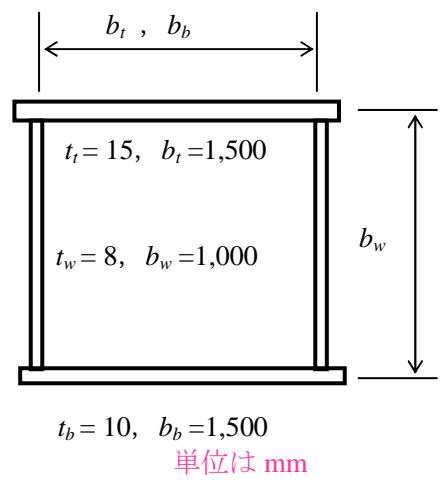


図-11.2 断面形状とせん断流

$$\text{せん断流は式(9.10)₂より, } q = \frac{T_s}{2A} = \frac{2.4 \cdot 10^9}{2 \cdot 1,500 \cdot 1,000} = 8.0 \cdot 10^2 \text{ N/mm}$$

$$\text{上フランジのせん断応力, } \tau_t = \frac{q}{t_t} = \frac{8.0 \cdot 10^2}{15} = 53.3 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{下フランジのせん断応力, } \tau_b = \frac{q}{t_b} = \frac{8.0 \cdot 10^2}{10} = 80.0 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{ウェブのせん断応力, } \tau_w = \frac{q}{t_w} = \frac{8.0 \cdot 10^2}{8} = 100.0 \text{ N/mm}^2$$

$$\begin{aligned} \text{ねじり率は式(10.19)₁より, } \vartheta &= \frac{T_s}{4A^2G} \sum_{i=1}^k \frac{s_i}{t_i} = \frac{2.4 \cdot 10^9}{4 \cdot (1,500 \cdot 1,000)^2 7.7 \cdot 10^4} \left(\frac{1,500}{15} + \frac{1,500}{10} + 2 \frac{1,000}{8} \right) \\ &= 3.46 \cdot 10^{-9} \cdot (100 + 150 + 250) = 1.73 \cdot 10^{-6} \text{ rad/mm} \end{aligned}$$

$$\text{相対ねじり角, } \phi = L\vartheta = 10,000 \cdot 1.73 \cdot 10^{-6} = 1.73 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

2.12 薄板の純ねじり

図-12.1に示すように幅 b が厚さ t に比して十分長い矩形断面を有する部材の両端にねじりモーメント T_s が作用した場合について考える。このような断面について石鹼膜相似を施せば、膜面は幌馬車の幌のように膨らむ。図-12.2に示すようにこの膜は短辺の近傍を除いて高さ h は z 方向あるいは b の方向に同一レベルで、 y 方向あるいは t の方向にのみ変化する。この場合、 h の z 方向の 2 回微分は $\partial^2 h / \partial z^2 = 0$ と見なせる。従って式(6.6)で表わされる膜面の基礎方程 $\frac{d^2 h}{dy^2} + \frac{d^2 h}{dz^2} = -\frac{p}{H}$ は以下となる。

$$\frac{d^2 h}{dy^2} = -\frac{p}{H} \cdots \cdots (12.1)$$

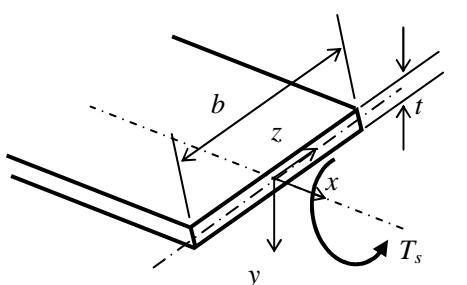


図-12.1 薄板のねじり
(y 軸が下方向に注意)

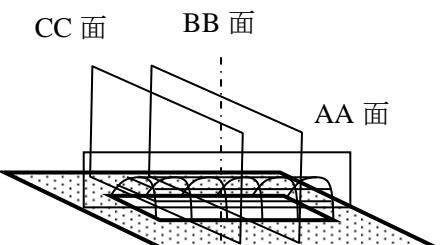


図-12.2 薄板のねじりの石鹼膜相似

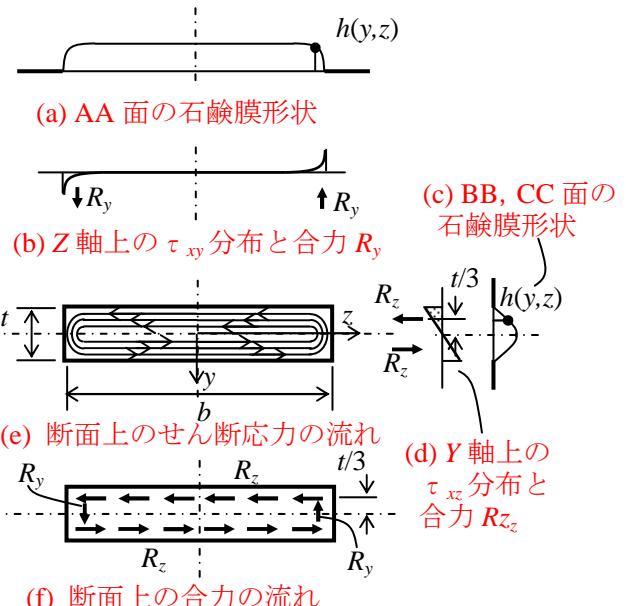


図-12.3 薄板のねじりにおける応力の分布

境界条件 $y = \pm t/2$ において $h=0$ を満足する解として膜面の式を得る.

$$h = \frac{p}{2H} \left(\frac{t^2}{4} - y^2 \right) \cdots \cdots (12.2)$$

上記を y で 2 階微分して、式(12.1)が満足されることを確認する.

$$\frac{d^2h}{dy^2} = \frac{d}{dy} \frac{p}{2H} (-2y) = -\frac{p}{H} \rightarrow \text{式(12.1)} \rightarrow \text{OK}$$

式(12.2)に $y = \pm t/2$ を代入して境界条件が満足されることを確認する.

$$h = \frac{p}{2H} \left(\frac{t^2}{4} - \left(\pm \frac{t}{2} \right)^2 \right) = 0 \rightarrow \text{OK}$$

図-12.3(a) に図-12.2 に示す AA 面の石鹼膜の形状を示す. 同様に図-12.3(c) に BB 面, CC 面の形状を示す. 短辺の近傍を除いて膜の高さに変化は無いので BB 面, CC 面の形状は同じと見なせる.

応力関数 f_{ai} と石鹼膜の関数 h の関係を示す式(6.10)に式(12.2)を用いて f_{ai} を求めると,

$$f_{ai}(y, z) = 2G\vartheta \frac{H}{p} h(y, z) = 2G\vartheta \frac{H}{p} \frac{p}{2H} \left(\frac{t^2}{4} - y^2 \right) = G\vartheta \left(\frac{t^2}{4} - y^2 \right) \cdots \cdots (12.3)$$

断面には図-12.3(e) に示す循環せん断応力が生じることが推察される. 式(12.3)よりせん断応力 τ_{xz} は式(5.1)₂ を用いて以下となる.

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial}{\partial y} f_{ai}(y, z) = -\frac{\partial}{\partial y} G\vartheta \left(\frac{t^2}{4} - y^2 \right) = -G\vartheta(-2y) = 2G\vartheta y \cdots \cdots (12.4)$$

$h(y, z)$ と $f_{ai}(y, z)$ は式(6.10)より相似な関数であり, せん断応力の分布は h の勾配で表せる. 式(12.2)より h が y 軸方向に放物線であることから, τ_{xz} の y 軸方向分布は直線となる. 図-12.3(d) にこのアナロジーから得られる τ_{xz} の分布を示す. また, せん断応力の+側, -側それぞれの単位長さ当たりの合力を R_z で示す. この R_z の作用点は応力分布が三角形であることから, z 軸から $(t/2) \cdot 2/3 = t/3$ の距離である. 一方, τ_{xy} の分布については石鹼膜の形状から短辺の近傍で h が z 軸方向に急変することから, その分布と合力 R_y が図-12.3(b) のようになることが推察される. しかし式(12.3)では z 方向の変化を無視しているので具体的に合力の数値や作用位置を算出することはできない.

以下では上述 R_z のみに着目し, これと作用するねじりモーメントとのつり合いを考え関係式を誘導する. 2.5 節にて任意形状を有する棒材のねじりにおいては, 断面に作用する直交 2 方向のせん断応力がそれぞれねじりモーメントの半分ずつを分担していることを解説した. このことは上述 R_z によって分担されるねじりモーメントが T_s の半分になることを意味する. 図-12.3(f) を参照し, 短辺近傍での応力の非一様性は無視し, さらに R_z は幅 b 全長にわたって生じるものとする. 式(12.4)を用いて,

$$R_z = \int_0^{t/2} \tau_{xz} dy = \int_0^{t/2} 2G\vartheta y dy = 2G\vartheta \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{t/2} = \frac{G\vartheta t^2}{4} \cdots \cdots (12.5)$$

作用モーメントの半分とのつり合いを考えると, R_z は長さ b にわたって腕の長さ $t/3$ で互いに逆方向に生じるので,

$$\frac{T_s}{2} = 2 \cdot R_z \cdot b \frac{t}{3} = 2 \frac{G\vartheta t^2}{4} \cdot b \frac{t}{3} \cdots \cdots (12.6)$$

これより、

$$T_s = G\vartheta \frac{bt^3}{3} = G \frac{bt^3}{3} \frac{d\phi}{dx} \dots\dots(12.7)$$

従って、薄肉板断面のねじり定数 J は $bt^3/3$ となる。

ちなみに、 T_s の残り半分は図-12.3(f) の R_y が分担する。

2.13 薄肉折れ板開断面構造の純ねじり

板長さ b_i 、板厚 t_i の薄板が折れ板として連なり、図-13.1 に示すように、中空筒状部分を有さない薄肉構造を薄肉折れ板開断面構造という。板厚 t_i は板厚中心線の全長 s_l に比べて十分小さいものとする。

ここに、 $s_l = \sum_{i=1}^k b_i$ 、 k は板の総数である。

このような構造がねじりモーメント T_s の作用により回転中心 O の回りにねじり変形 $d\phi$ を生じることを考える。 i 番目の板に着目し、その中心 O_i の変位の状況を追跡する。変位前の O_i の位置を (y, z) とすると、

2.4節で説明したように O_i にはそれぞれ y 軸、 z 軸に沿った以下のような併進変位 v 、 w が生じる。

$$\text{式(4.1)} \rightarrow v \doteq -r \cdot d\phi \cdot \sin\theta = -z \cdot d\phi$$

$$\text{式(4.2)} \rightarrow w \doteq r \cdot d\phi \cdot \cos\theta = y \cdot d\phi$$

ここに、 r : O 点から O_i 点までの距離

しかし、これらの変位によって板 i に純ねじり変形は生じない。この変位は別資料で説明するそりねじり変形に関与する。このような併進変位に加え、 O_i には回転変位が生じ、その回転量は断面全体の回転量 $d\phi$ に等しい。

従って、板 i は O_i を中心 $d\phi$ のねじり変形を生じていると解釈することができる。そのことは断面を構成する全ての板に共通である。個々の板が負担するねじりモーメントを T_{si} とするとこれらと作用ねじりモーメント T_s との間に以下の関係が成立し、さらに、個々の板に式(12.7)の関係を用いるとこのような折れ板構造に対するねじり定数 J を計算することができる。

$$T_s = \sum_{i=1}^k T_{si} = \sum_{i=1}^k G \frac{b_i t_i^3}{3} \frac{d\phi}{dx} = G\vartheta \sum_{i=1}^k \frac{b_i t_i^3}{3} \dots\dots(13.1)$$

純ねじりの問題では、 $d\phi/dx$ は一定で各板の G が全て等しければ、全体断面のねじり定数 J は、

$$J = \sum_{i=1}^k \frac{b_i t_i^3}{3} \dots\dots(13.2)$$

また、図-13.2 に示すように折れ板構造に分岐があっても、個々の板に生じる変位は前述と同じであり、全ての板に対して総和をすることで式(13.2)の適用が可能である。

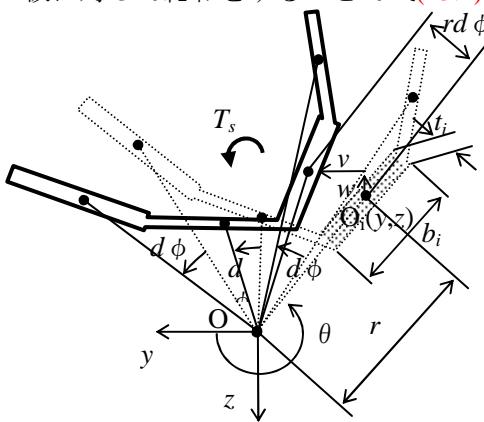


図-13.1 薄肉折れ板開断面のねじり

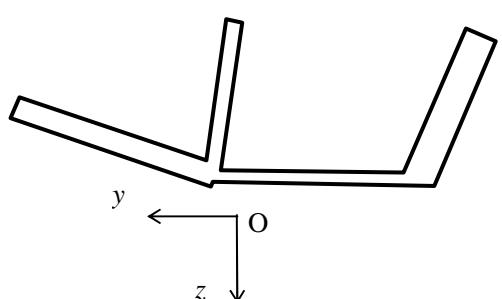


図-13.2 分岐のある薄肉折れ板開断面

2.14 任意形状の薄肉開断面構造の純ねじり

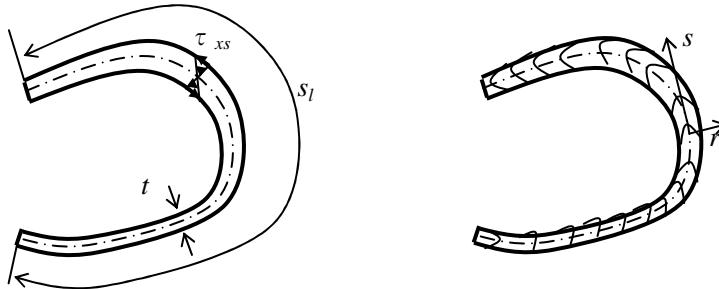


図-14.1 薄肉開断面構造

図-14.2 薄肉開断面構造の石鹼膜相似

図-14.1 に示すように、肉厚 t の薄板からなり、筒状部分を形成しない薄肉材を薄肉開断面材という。薄肉中心線に沿って曲線座標 s をとる。肉厚 t は s に沿って変化するが、薄肉中心線の展開長 s_l に比べて十分小さいものと、石鹼膜相似において、図-14.2 に示すように、膜面の高さ h は s 方向に一定で、肉厚中心線に垂直な座標 r 方向に放物線状に変化する。この場合、 h の s 方向の 2 回微分は $\partial^2 h / \partial s^2 = 0$ と見なせる。従って膜面の形状を表す基礎方程式(6,6)は y を r に置き代えて以下となる。

$$\frac{d^2h}{dr^2} = -\frac{p}{H} \cdots \cdots (14.1)$$

上式を 2 階積分して、 $r = \pm(t/2)$ で $h = 0$ の境界条件を代入すると、

$$h = \frac{p}{2H} \left(\frac{t^2}{4} - r^2 \right) \cdots \cdots (14.2)$$

式(12.4)と同様に s 方向のせん断応力 τ_{xs} は

$$\tau_{xs} = 2G \vartheta r \cdots \cdots (14.3)$$

となり、 r 方向には直線分布となる。

次に石鹼膜の体積は、 $s_l \gg t$ の場合は溝の両端の特異形状の影響は相対的に少なく、近似的に

$$V = \int_0^{s_l} \int_{-t/2}^{t/2} h dr ds \cdots \cdots (14.4)$$

上式に式(14.2)を代入して、

$$V = \int_0^{s_l} \int_{-t/2}^{t/2} \left\{ \frac{p}{2H} \left(\frac{t^2}{4} - r^2 \right) \right\} dr ds = \int_0^{s_l} \left[\frac{p}{2H} \left(\frac{t^2}{4} r - \frac{1}{3} r^3 \right) \right]_{-t/2}^{t/2} ds = \frac{p}{2H} \int_0^{s_l} \frac{4}{24} t^3 ds = \frac{p}{12H} \int_0^{s_l} t^3 ds \cdots \cdots (14.5)$$

この V を式(6.14)の V に用いてねじりモーメント T_s とねじり率 ϑ の関係が次のように得られる。

$$\vartheta = \frac{p}{4GVH} T_s = \frac{p}{4G \frac{p}{12H} \int_0^{s_l} t^3 ds H} T_s = \frac{T_s}{G \frac{1}{3} \int_0^{s_l} t^3 ds} \cdots \cdots (14.6)$$

あるいは,

$$T_s = \vartheta G \frac{1}{3} \int_0^{s_l} t^3 ds \cdots \cdots (14.7)$$

したがって、任意の薄肉開断面材のねじり定数 J は

$$J = \frac{1}{3} \int_0^{s_l} t^3 ds \cdots \cdots (14.8)$$

上式中、特に肉厚 t が s 方向に一定の場合については、

$$J = \frac{1}{3} \int_0^{s_l} t^3 ds = \frac{1}{3} t^3 [s]_0^{s_l} = \frac{1}{3} t^3 s_l \cdots \cdots (14.9)$$

板幅 b の板厚の薄い矩形断面のねじり定数 J は $s_l = b$ として、

$$J = \frac{1}{3} t^3 b \cdots \cdots (14.10)$$

$$\vartheta = \frac{T_s}{G \frac{1}{3} \int_0^{s_l} t^3 ds} = \frac{T_s}{G \frac{1}{3} t^3 b} \cdots \cdots (14.11)$$

せん断応力の最大値は式(14.3)より、

$\tau_{xs} = 2G\vartheta r$ の $r = t/2$ として

$$\tau_{\max} = 2G\vartheta \frac{t}{2} = 2G \frac{T_s}{G \frac{1}{3} t^3 b} \frac{t}{2} = \frac{3}{t^2 b} T_s \cdots \cdots (14.12)$$

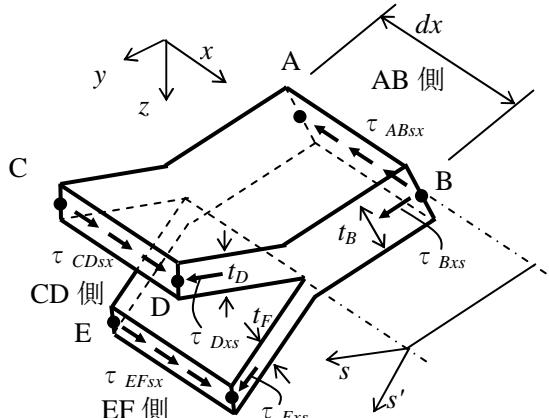


図-15.1 分岐のある薄肉壁のせん断応力

2.15 分岐のある薄肉壁のせん断流

図-15.1 に示すように分岐のある薄肉壁の微小要素を取り出し棒軸方向の辺をそれぞれ AB, CD, EF とする。2.9 節に準じてこの要素に生じるせん断応力を検討する。棒軸方向を x 軸とし、微小距離 dx を隔てる 2 つの断面を A-C or E, および B-D or F とする。断面 B-D or F において分岐する薄肉微小要素の肉厚中心線に沿って BD 方向を s 軸、BF 方向を s' 軸とする。また、肉厚さは分岐点の近傍で B から D へ、 t_B から t_D 、また、B から F へ、 t_B から t_F に変化するものとする。純ねじりの問題では断面の形状は棒軸方向のどの断面においても等断面の場合を考えることから dx 方向に肉厚さは変化しない。純ねじり問題では棒軸方向の直応力 σ_x は存在せず、それぞれ AB, CD, EF に沿って生じるせん断応力を τ_{ABsx} , τ_{CDsx} , τ_{EFsx} とするとき、微小要素の x 方向の力のつり合いは以下となる。

$$\tau_{ABsx} \cdot t_B \cdot dx - \tau_{CDsx} \cdot t_D \cdot dx - \tau_{EFsx} \cdot t_F \cdot dx = 0 \rightarrow \tau_{ABsx} \cdot t_B = \tau_{CDsx} \cdot t_D + \tau_{EFsx} \cdot t_F \cdots \cdots (15.1)$$

純ねじりの問題ではねじり率 $\vartheta = d\phi/dx$ が x 方向に一定であるため、これらは x 方向に変化しない。

次に断面 B-D or F に沿うせん断応力を考える。B, D, F の近傍における肉厚中心線に沿うせん断応力をそれぞれ τ_{Bxs} , τ_{Dxs} , τ_{Fxs} とする。共役せん断応力の関係により以下が成立する。

$$\tau_{Bxs} = \tau_{ABsx}, \quad \tau_{Dxs} = \tau_{CDsx}, \quad \tau_{Fxs} = \tau_{EFsx} \cdots \cdots (15.2)_{1,2,3}$$

これらの関係を式(15.1)に代入すると,

$$\tau_{Bxs} \cdot t_B = \tau_{Dxs} \cdot t_D + \tau_{Fxs} \cdot t_F \cdots \cdots (15.3)$$

この結果は分岐点近傍において分岐前に生じるせん断応力 τ と厚さ t との積は分岐後の 2 つの断面それぞれにおけるせん断応力と厚さの積の合計に等しいことを示している。せん断流を $q = \tau \cdot t$ とすると、分岐前に流入するせん断流は分岐後のせん断流の合計に等しいことを意味している。このことはせん断流が合流する場合にも同様であり、合流前のせん断流の合計が合流後のせん断流になる。図-15.1 では分岐角度について DBF を鋭角として示したが最初に立てた式(15.1)は分岐角度に関係なく成立するため以上のせん断流の分岐、合流の性質は会合角度に関係なく成立する。

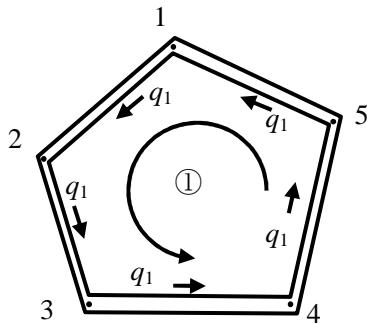


図-16.1 薄肉 1 室構造の循環せん断流

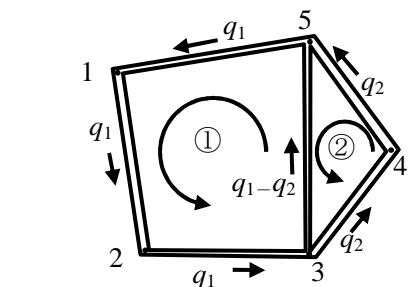
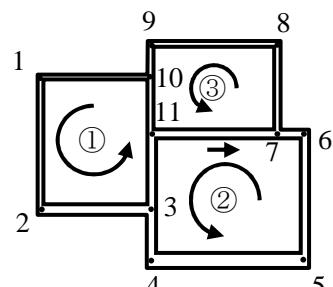
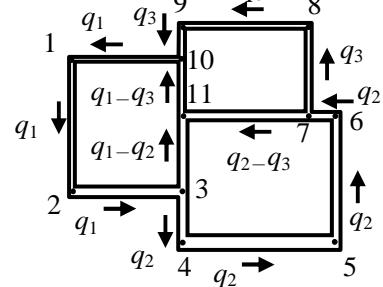


図-16.2 薄肉 2 室構造の循環せん断流

(a)室ごとの循環せん断流



(b)外周壁、共有壁のせん断流

図-16.3 薄肉 3 室構造のせん断流

2.16 多室薄肉構造のせん断流

2.9 節に解説したように薄肉の壁で囲まれる閉断面部材にねじりモーメントが作用する時、同部材の壁面には循環せん断流が発生する。図-16.1 に示すように 1 室の折れ板による閉断面構造において、板が折れ曲がる点 1, 2, ……5 を格点と呼ぶ。このような構造では循環せん断流 q_1 は全ての外周壁に左回りに等しく流れる。次に図-16.2 に示す 2 室構造を考える。この場合、第 1 室①と第 2 室②の外周 5-1-2-3 および 3-4-5 にはそれぞれ循環せん断流 q_1 と q_2 が流れる。隣接する①と②が共有する共有壁 3-5 には $q_1 - q_2$ のせん断流が流れる。共有壁のせん断流が $q_1 - q_2$ になることは 2.15 節のせん断流の分岐、合流の性質を考えて確認される。例えば格点 3 では 2 からの q_1 が 4 への q_2 と 5 への $q_1 - q_2$ に分岐し、分岐後においても合計の流量は $q_2 + (q_1 - q_2) = q_1$ であるから分岐前の q_1 に等しい。また、格点 5 では

それぞれ 3 と 4 からの $q_1 - q_2$, q_2 が合流し **格点 1** に向かうが、合流前の合計流量 $(q_1 - q_2) + q_2 = q_1$ は合流後の **共有壁 5-1** の流量 q_1 に等しい。

図-16.3 には 3 室構造の例を示すが状況はこれまでと同様で外周 10-1-2-3 には q_1 が、3-4-5-6-7 には q_2 , 7-8-9-10 には q_3 が流れる。共有壁 3-11 は①と②が隣接するので $q_1 - q_2$, 共有壁 11-10 は①と③が隣接するので $q_1 - q_3$, 共有壁 7-11 は②と③が隣接するので $q_2 - q_3$ が流れる。これらはいずれも左回りを+と考えている。格点 11 では 3 と 7 からが合流して 10 に向かうとして流量を確認すると、合流前は $(q_1 - q_2) + (q_2 - q_3) = q_1 - q_3$ でこれは合流後の **共有壁 11-10** のせん断流に等しい。以上の性質は簡単のため壁が直線状となる折れ板として説明したが、壁が曲線の場合でも、また壁厚が途中で変化する場合にも **同様の性質が成り立つ**。

ねじり問題ではこれらの各室に生じる循環せん断流 q_i が成すモーメントの合計が作用モーメント T_s につりあう。室数が $i=1 \sim k$ の場合、モーメントのつり合い式は各室ごとの総和として下記となる。

$$T_s = \sum_{i=1}^k \oint q_i r ds = q_1 \oint r ds + q_2 \oint r ds + \dots + q_m \oint r ds + \dots + q_n \oint r ds + \dots + q_k \oint r ds \quad (16.1)$$

ここに、 r は **付録-2.C** に示す一周面積分の定点からの半径で、回転中心から各室の各壁におろした垂線の長さである。循環せん断流 q_i は各室ごとに一定のため積分記号の外に出る。

先に説明した通り、仮に第 m 室と第 n 室が隣接するとき、その共有壁では $q_m - q_n$ のせん断流が流れ、このことを上式中の各項積分との対応で考えると、まず第 m 室について共有壁に左回りの q_m が流れ、それに加えて第 n 室についても共有壁に左回りの q_n が流れると考える。同じ左回りであっても m と n の隣接位置関係により q_m が正の時のとき q_n が負、または、 q_m が負の時のとき q_n が正となる。このように解釈することで共有壁があったとしても各室ごとに構成されるモーメントは各室ごとの一周積分から求められ、その合計が T_s とつりあうことになる。次節ではこのような循環せん断流の性質を利用して多室薄肉閉断面構造の各室に生じるせん断流、全体断面のねじり定数を求める方法を紹介する。

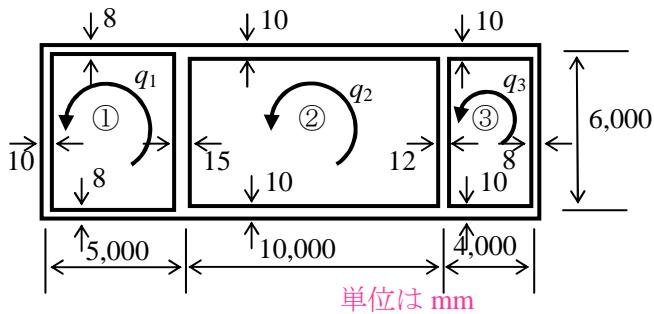


図 17.1 薄肉 3 室構造の例

2.17 多室薄肉閉断面構造の計算例

図-17.1 に示すような 3 室の箱断面についてねじり定数および全断面にねじりモーメント T_s が作用した時の各室に生じる循環せん断流 q_n ($n = 1 \sim 3$) を計算する。ここに、 n は室の番号を示す。式(10.8)を変形し k 枚の板で構成される 1 室の折れ板閉断面構造に適用する。

$$\text{式(10.8)} \rightarrow -\oint r_s \vartheta ds + \oint \frac{\tau}{G} ds = 0 \rightarrow \oint r_s \vartheta ds = \oint \frac{\tau}{G} ds \cdots \cdots (17.1)$$

式(17.1)の左辺を式(c.2)に従い一周積分し、右辺の積分を板 1 枚ごとの総和とする。1 室折れ板構造では室を囲む全ての板に生じるせん断流 q は一定で $\tau = q/t$ から、板ごとの板厚を t_i として、

$$\oint r_s ds = 2\vartheta A = \sum_{i=1}^k \frac{\tau}{G} ds = \sum_{i=1}^k \frac{1}{G} \frac{q}{t_i} ds \cdots \cdots (17.2)_{1,2,3,4}$$

ここに、 A : 板厚中心線で囲まれた 1 室の面積である。

$$\text{ここで、 } q \text{ の単位を確認すると、 } [q] = [\tau t] = \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \text{ mm} = \text{N/mm}$$

多室の場合、1つの室を囲む壁に流れるせん断流は一定ではなくなる。即ち、外周にある壁にはその部屋に生じるせん断流が流れるが、隣室との共有壁に流れるせん断流は隣室に生じる逆向きのせん断流の影響を受ける。壁の材料が同じであればせん断弾性係数 G は等しく、第 n 番目の部屋について式(17.2)_{2,4} は下記となる。なお、壁ごとに材料が異なる場合は代表の G を考え、これと各壁のせん断弾性係数 G_i との比率を計算し、それを総和記号の中に数値として残して計算を進めればよい。

$$2\vartheta_n A_n = \frac{1}{G} \sum_{i=1}^k \frac{q_{n,i}}{t_i} ds \cdots \cdots (17.3)$$

ここに、 $q_{n,i}$ は第 n 室の i 番目の壁に生じるせん断流を示す。

第 n 室に第 $m = a, b, c, \dots$ 室が隣接し、これらがそれぞれ第 n 室の壁 $i = 1 \sim k$ のうちの壁 $j = f, g, h, \dots$ で壁を共有するとすれば、式(17.1)を修正して、

$$2\vartheta_n A_n = \frac{1}{G} \sum_{i=1}^k \frac{q_n}{t_i} ds + \frac{1}{G} \sum_{j=f, g, h, \dots \text{and } m=a, b, c, \dots} -\frac{q_m}{t_j} ds \cdots \cdots (17.4)$$

ここに、 q_n は第 n 室に生じる循環せん断流である。

上式の右辺第 1 項は第 n 室の循環せん断流、第 2 項の $-q_m/t_j$ は第 n 室の j 番目の壁を第 m 室の壁が共有する場合を示し、負記号により第 m 室の循環せん断流 q_m が逆向きに流れることを示す。

合計 n_t 室からなる多室構造では室ごとに上記の式が成立するが、純ねじり変形では全断面の形状に変化

が無いことから各室のねじり率 ϑ_n は全ての室に共通でこれを ϑ とすると式(17.4)は.

$$2\vartheta A_n G = \sum_{i=1}^k \frac{q_n}{t_i} ds - \sum_{j=f,g,h \dots \text{and } m=a,b,c \dots} \frac{q_m}{t_j} ds \dots \dots \dots (17.5)$$

上式両辺を ϑG で除し,

$$2A_n = \sum_{i=1}^k \frac{q_n}{\vartheta t_i} ds - \sum_{j=f,g,h \dots \text{and } m=a,b,c \dots} \frac{q_m}{\vartheta t_j} ds \dots \dots \dots (17.6)$$

さらに, $q_n / \vartheta G = x_n$ として置き換えると,

$$2A_n = \sum_{i=1}^k \frac{x_n}{t_i} ds - \sum_{j=f,g,h \dots \text{and } m=a,b,c \dots} \frac{x_m}{t_j} ds \dots \dots \dots (17.7)$$

ここで, x_n の単位の確認をすると, $[x_n] = \left[\frac{q_n}{G\vartheta} \right] = \frac{\text{N}}{\text{mm}} / \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \frac{1}{\text{mm}} = \text{mm}^2$

全ての室 n_t に対して式(17.7)を方程式として立てることができ, その中には n_t 個の未知数 x_n ($n = 1 \sim n_t$) が含まれる. 即ち, 与えられる一次方程式が n_t 個であり, 未知数も n_t 個であるため連立させて解くことができる. このことを図-17.1 の左側の第1室について式にすると,

$$2 \cdot 5,000 \cdot 6,000 = 6.0 \cdot 10^7 = \left(\frac{6,000}{10} + \frac{5,000}{8} + \frac{6,000}{15} + \frac{5,000}{8} \right) x_1 - \frac{6,000}{15} x_2 = 2,250 x_1 - 400 x_2 \dots \dots \dots (17.8)$$

第2室, 3室については,

$$2 \cdot 10,000 \cdot 6,000 = 12.0 \cdot 10^7 = \left(\frac{6,000}{15} + \frac{10,000}{10} + \frac{6,000}{12} + \frac{10,000}{10} \right) x_2 - \frac{6,000}{15} x_1 - \frac{6,000}{12} x_3 = -400 x_1 + 2,900 x_2 - 500 x_3 \dots \dots \dots (17.9)$$

$$2 \cdot 4,000 \cdot 6,000 = 4.8 \cdot 10^7 = \left(\frac{6,000}{12} + \frac{4,000}{10} + \frac{6,000}{8} + \frac{4,000}{10} \right) x_3 - \frac{6,000}{12} x_2 = -500 x_2 + 2,050 x_3 \dots \dots \dots (17.10)$$

これらをマトリックス表示すると,

$$\begin{bmatrix} 2,250 & -400 & 0 \\ -400 & 2,900 & -500 \\ 0 & -500 & 2,050 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.0 \cdot 10^7 \\ 12.0 \cdot 10^7 \\ 4.8 \cdot 10^7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36,000 \\ 52,600 \\ 36,200 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (17.11)$$

式(16.1)が示すように, 循環せん断流がなすモーメントの合計は作用力 T_s とつりあう.

式(9.10)₁ から, 1室薄肉閉断面の作用モーメント T_s とせん断流 q の関係は,

$$T_s = 2qA \dots \dots \dots (17.12)$$

多室薄肉閉断面のねじりモーメントについては, 各室に対する式(17.12)を合計することにより.

$$T_s = \sum_{n=1}^{n_t} T_{sn} = \sum_{n=1}^{n_t} 2q_n A_n \dots \dots \dots (17.13)$$

ここに, q_n は第 n 室に生じる循環せん断流, A_n は第 n 室の断面積である.

ところで式(5.14)から作用モーメント T_s とねじり定数 J はねじり率 $\vartheta = d\phi/dx$ と以下の関係にある.

$$T_s = G\vartheta J \dots \dots \dots (17.14)$$

上式を式(17.13)に代入すると,

$$G\vartheta J = \sum_{n=1}^{n_t} 2q_n A_n \dots \dots \dots (17.15)$$

両辺を $G\vartheta$ で除すると

$$J = \sum_{n=1}^{n_t} 2 \frac{q_n}{G \vartheta} A_n = \sum_{n=1}^{n_t} 2 x_n A_n \cdots \cdots (17.16)$$

図 17.1 に示す 3 室薄肉閉断面のねじり定数 J については、式(17.16)に式(17.11)にて得られた $x_1 \sim x_2$ を代入することにより、

$$\begin{aligned} J &= 6.0 \cdot 10^7 \cdot 2 \cdot 4,000 \cdot 6,000 + 12.0 \cdot 10^7 \cdot 2 \cdot 10,000 \cdot 6,000 + 4.8 \cdot 10^7 \cdot 2 \cdot 5,000 \cdot 6,000 \\ &= 6.0 \cdot 10^7 \cdot 36,000 + 12.0 \cdot 10^7 \cdot 52,600 + 4.8 \cdot 10^7 \cdot 36,200 = 1.02 \cdot 10^{13} \text{ mm}^4 \cdots \cdots (17.17) \end{aligned}$$

式(17.6)から(17.7)の変形においては次のパラメーター x_n を定義した。

$$x_n = \frac{q_n}{G \vartheta} \cdots \cdots (17.18)$$

式(17.18)を q_n について解き、式(17.14)を代入すると、

$$q_n = G \vartheta x_n = \frac{T_s}{J} x_n \cdots \cdots (17.19)$$

上式に既に得られた式(17.11)の $x_1 \sim x_3$ と式(17.17)の J を代入して、

$$q_1 = \frac{x_1}{J} T_s = \frac{36,000}{1.02 \cdot 10^{13}} T_s = 3.53 \cdot 10^9 \cdot T_s \text{ N/mm} \cdots \cdots (17.20)$$

単位の確認をすると、
 $[q_1] = \left[\frac{x_1}{J} T_s \right] = \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}^4} \text{Nmm} = \frac{\text{N}}{\text{mm}}$ → せん断流の単位であり、OK

同様に、

$$q_2 = \frac{x_2}{J} T_s = \frac{52,600}{1.02 \cdot 10^{13}} T_s = 5.16 \cdot 10^9 \cdot T_s \text{ N/mm} \cdots \cdots (17.21)$$

$$q_3 = \frac{x_3}{J} T_s = \frac{36,200}{1.02 \cdot 10^{13}} T_s = 3.55 \cdot 10^9 \cdot T_s \text{ N/mm} \cdots \cdots (17.22)$$

2.18 2軸対称矩形薄板筒体の純ねじり

図-18.1に示す筒長さ L , 幅 b , 高さ h で断面が2軸対称の矩形薄板筒体の純ねじりについて考察する。上下の板が板厚 t_f , 左右の板が t_w の断面に純ねじりによって回転中心の回りに ϕ だけ回転変形を生じる場合を考える。変形後の筒体の形状を図-18.2に示す。一般断面筒体のねじり変形は図-18.3(a)に示す断面の回転に図-18.3(b)に示すそりを伴うため、立体図では図-18.2のようないびつな形に見える。図-18.4に示すようにねじりによって上下の板に生じるせん断応力を τ_f , 左右の板に生じるせん断応力を τ_w とすると作用モーメント T_s とのつり合いから、

$$T_s = 2 \left(b t_f \tau_f \frac{h}{2} + h t_w \tau_w \frac{b}{2} \right) = b h t_f \tau_f + b h t_w \tau_w \cdots \cdots (18.1)$$

閉断面に流れる循環せん断流 q は2.9節で述べた微小要素での検討から一定であるので

$$q = t_f \tau_f = t_w \tau_w \cdots \cdots (18.2)$$

式(18.1)に(18.2)を代入して、

$$T_s = b h t_f \tau_f + b h t_w \tau_w = b h t_f \frac{q}{t_f} + b h t_w \frac{q}{t_w} = b h q + b h q = 2 b h q \cdots \cdots (18.3)$$

図-18.3(a)に示すように断面ABCDは角度 ϕ 回転しており、上板では左方向に $\phi h / 2$, 左板では下方向に $\phi b / 2$ の変位が生じている。2.10節のBredt-Bathoの式の誘導で説明したように、筒体を構成する各板はねじり変形の結果、その面内に①回転と②せん断変形を生じており、その合計として筒軸方向への出入り、あるいはそり u を生じている。以下では①, ②によって生じるそりをそれぞれ u_{θ} , u_{γ} とし、それらの合計が点Bを起点として B→A→D→C→Bと周回した後の終点Bで一致することを利用して、断面のねじり定数 J を誘導する。

図-18.5(a)に示すように上板の①回転に伴うA点のB点に対するそり $u_{\theta f}$ は、 x 軸の負方向に生じ、

$$u_{\theta f} = -\frac{\frac{h}{2}\phi}{L} b = -\frac{bh}{2L}\phi \cdots \cdots (18.4)$$

同様に、図-18.5(b)に示す左板の①回転に伴うD点のA点に対するそり $u_{\theta w}$ は、

$$u_{\theta w} = -\frac{\frac{b}{2}\phi}{L} h = -\frac{bh}{2L}\phi \cdots \cdots (18.5)$$

下板には式(18.4)と、また、右板には式(18.5)と同様のそりが発生する。図-18.6に示すように稜線BB'にスリットがあるとして、これらの各板の面内回転によって生じるそりを合計した全体のずれ u_{θ} は、

$$u_{\theta} = -2(u_{\theta f} + u_{\theta w}) = -2\frac{bh}{L}\phi \cdots \cdots (18.6)$$

図-18.7(a)に示す上板の②せん断変形に伴うA点のB点に対するそり $u_{\gamma f}$ は、応力とひずみの関係式 $\gamma_f = \tau_f/G$ と式(18.2)を用いて、

$$u_{\gamma f} = \gamma_f b = \frac{\tau_f}{G} b = \frac{q}{t_f G} b \cdots \cdots (18.7)$$

同様に、図-18.7(b)に示す左板の②せん断変形に伴うD点のA点に対するそり $u_{\gamma w}$ は、応力とひずみの関係式 $\gamma_w = \tau_w/G$ と式(18.2)を用いて、

$$u_{\gamma w} = \gamma_w h = \frac{\tau_w}{G} h = \frac{q}{t_w G} h \cdots \cdots (18.8)$$

下板には式(18.7)と、また、右板には式(18.8)と同様のそりが発生する。図-18.8に示すように稜線 BB' にスリットがあるとして、これらの各板のせん断変形によって生じるそりを合計した全体のずれ u_γ は、

$$u_\gamma = 2(u_{\gamma f} + u_{\gamma w}) = 2\left(\frac{q}{t_f G} b + \frac{q}{t_w G} h\right) = \frac{2q}{G} \left(\frac{b}{t_f} + \frac{h}{t_w}\right) \cdots \cdots (18.9)$$

ところが実際の構造にはスリットはなく、始点 B と終点 B のずれが一致する必要があるので、式(18.6)、(18.9)を合計したものが 0 とならなければならない。

$$u_\vartheta + u_\gamma = -2 \frac{bh}{L} \phi + \frac{2q}{G} \left(\frac{b}{t_f} + \frac{h}{t_w}\right) = 0 \cdots \cdots (18.10)$$

上式を移項して、

$$\frac{bh}{L} \phi = \frac{q}{G} \left(\frac{b}{t_f} + \frac{h}{t_w}\right) \cdots \cdots (18.11)$$

筒体の長さが L であるので単位長さあたりの回転角をねじり率 ϑ とすれば、 $\vartheta = \phi / L$ より、上式は

$$bh\vartheta = \frac{q}{G} \left(\frac{b}{t_f} + \frac{h}{t_w}\right) \cdots \cdots (18.12)$$

ねじり率 ϑ について解けば、

$$\vartheta = \frac{q}{Gbh} \left(\frac{b}{t_f} + \frac{h}{t_w}\right) \cdots \cdots (18.13)$$

式(5.14)から作用モーメント T_s とねじり率 ϑ 、ねじり剛性 GJ の関係は以下であるので、

$$T_s = GJ\vartheta \cdots \cdots (18.14)$$

式(18.3)より、

$$T_s = 2bhq \cdots \cdots (18.15)$$

式(18.14)に(18.15)を代入すると、

$$GJ\vartheta = 2qbh \cdots \cdots (18.16)$$

$$\vartheta = \frac{2qbh}{GJ} \cdots \cdots (18.17)$$

式(18.17)の ϑ を式(18.13)を用いて表せば、

$$\frac{q}{Gbh} \left(\frac{b}{t_f} + \frac{h}{t_w}\right) = \frac{2qbh}{GJ} \cdots \cdots (18.18)$$

上式をねじり定数 J について解けば、

$$J = \frac{2b^2 h^2}{\left(\frac{b}{t_f} + \frac{h}{t_w}\right)} = \frac{4b^2 h^2}{2\left(\frac{b}{t_f} + \frac{h}{t_w}\right)} = \frac{4b^2 h^2}{\frac{b}{t_f} + \frac{h}{t_w} + \frac{b}{t_f} + \frac{h}{t_w}} \cdots \cdots (18.19)$$

以上の検討は構成各板がねじり変形後に元々の断面 ABCD の面に対してそりを生じることを前提に説明した。ここで 2.1 節で述べた丸棒のねじりの場合のように、矩形薄板筒体にそりが生じないための条件を考えてみる。この場合、上板、左板のそれぞれにおいて①回転によるそり変位、②せん断変形によるそり変位が合計として生じなければよい。このことを式に示すと、

上板については式(18.4)と(18.7)より

$$u_{\vartheta f} + u_{\gamma f} = -\frac{bh}{2L}\phi + \frac{q}{t_f G}b = 0 \cdots \cdots (18.20)$$

上式を変形して、 ht_f について解けば、

$$\frac{bh}{2L}\phi = \frac{q}{t_f G}b \cdots \cdots (18.21)$$

$$ht_f = \frac{2L}{G\phi}q \cdots \cdots (18.22)$$

左板については式(18.5)と(18.8)より

$$u_{\vartheta w} + u_{\gamma w} = -\frac{bh}{2L}\phi + \frac{q}{t_w G}h = 0 \cdots \cdots (18.23)$$

上式を変形して、 bt_w について解けば、

$$\frac{bh}{2L}\phi = \frac{q}{t_w G}h \cdots \cdots (18.24)$$

$$bt_w = \frac{2L}{G\phi}q \cdots \cdots (18.25)$$

式(18.22)と(18.25)の右辺が等しいことより、そりを生じない2軸対称矩形薄板筒体の条件は以下となる。

$$ht_f = bt_w \cdots \cdots (18.26)$$

あるいは、以下から上下の板の幅厚比と左右の板の幅厚比が等しいということが条件になる。

$$\frac{h}{t_w} = \frac{b}{t_f} \cdots \cdots (18.27)$$

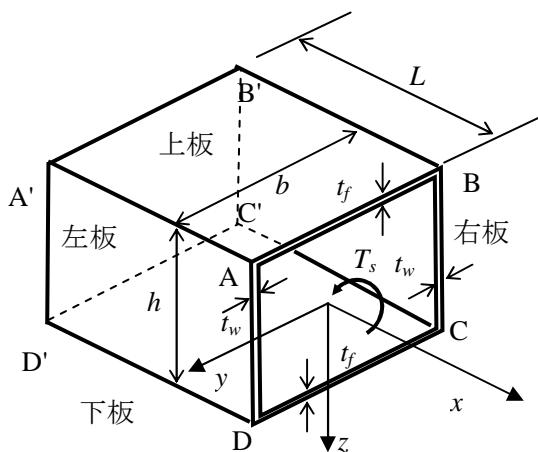


図-18.1 矩形薄板筒体の純ねじり

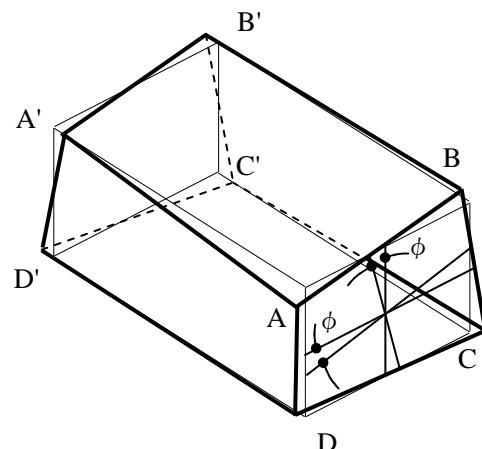


図-18.2 変形後の全体形状

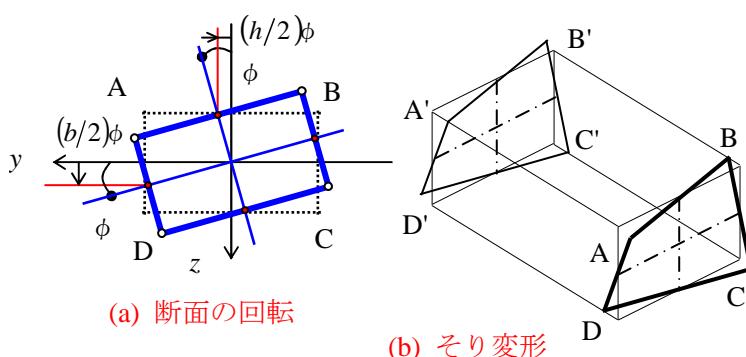


図-18.3 変形の分解

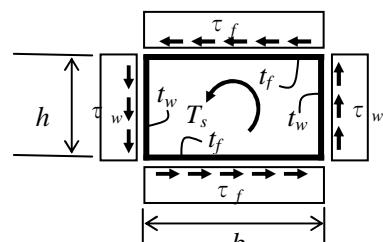


図-18.4 循環せん断応力

図-18.9 はそのような変形をイメージするための図で、**上下の板**、**左右の板**の動きを個別に描いた。なお、この条件は別資料、断面変形論で説明するずれ変形(断面変形)とねじり変形が連成しない場合の条件、あるいはウラゾフ論に出てくる $b_2 = 0$ の仮定と同じである。

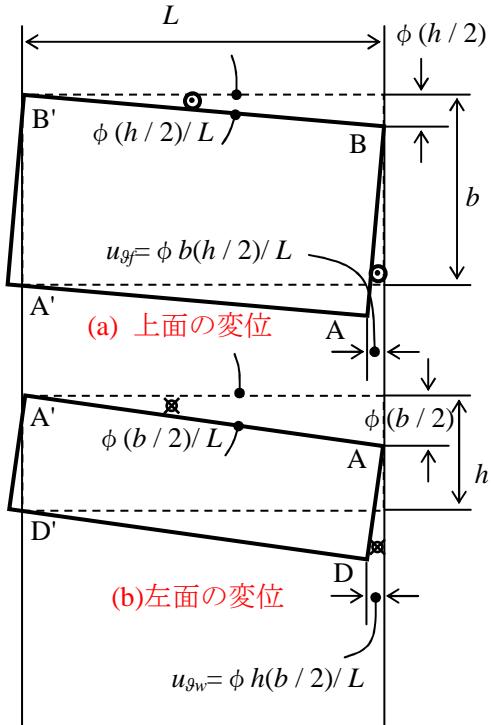


図-18.5 面内の回転による変位

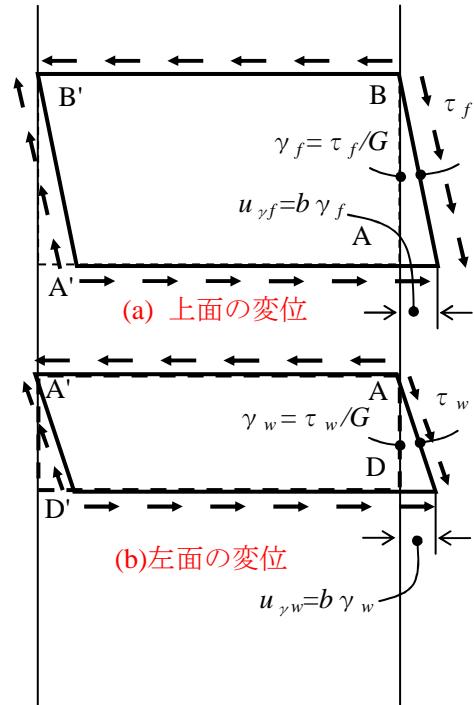


図-18.7 面内のせん断変形による変位

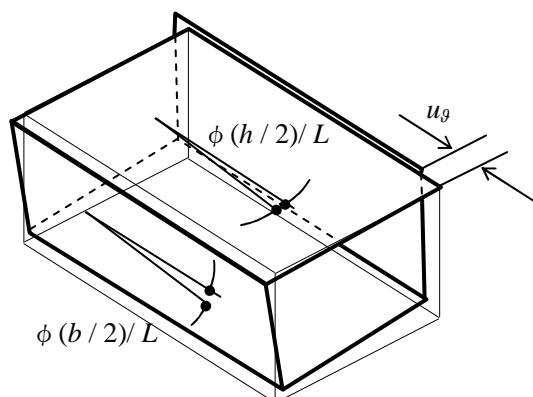


図-18.6 面内の回転によるずれ

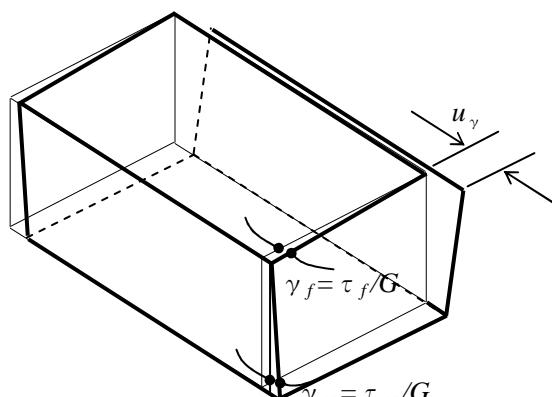
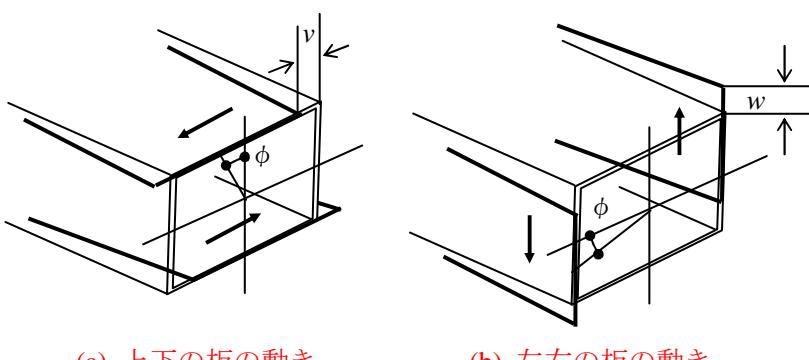


図-18.8 面内のせん断変形によるずれ



(a) 上下の板の動き

(b) 左右の板の動き

図-18.9 そりの生じない変形

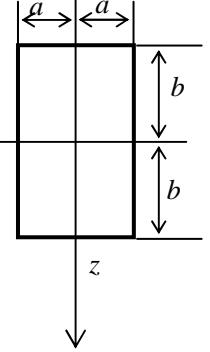
2.19 矩形棒の純ねじり

図-19.1 に示す、 $2a \times 2b$ の矩形断面を有する棒 ただし、 $b > a$ の純ねじりについて説明する。

(1) 応力関数

付録-2. D の式(D.39)に示したようにこのような断面に対するねじりの応力関数 f_{ai} は以下である。

$$f_{ai} = G\vartheta \left\{ \left(a^2 - y^2 \right) - \frac{32a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1}{\cosh \frac{n\pi}{2a} b} \right) \cos \frac{n\pi y}{2a} \cosh \frac{n\pi z}{2a} \right\} \cdots \cdots (19.1)$$



(2) せん断応力

式(5.1)_{1,2} よりせん断応力 τ_{xy} , τ_{xz} は応力関数 f_{ai} の z , y による導関数として,

$$\tau_{xy} = \frac{\partial f_{ai}}{\partial z} = G\vartheta \left\{ -\frac{32a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1}{\cosh \frac{n\pi}{2a} b} \right) \cos \frac{n\pi y}{2a} \frac{n\pi}{2a} \sinh \frac{n\pi z}{2a} \right\}$$

$$= -\frac{16a}{\pi^2} G\vartheta \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1}{\cosh \frac{n\pi}{2a} b} \right) \cos \frac{n\pi y}{2a} \sinh \frac{n\pi z}{2a} \cdots \cdots (19.2)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial f_{ai}}{\partial y} = -G\vartheta \left\{ -2y - \frac{32a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1}{\cosh \frac{n\pi}{2a} b} \right) \left(-\frac{n\pi}{2a} \right) \sin \frac{n\pi y}{2a} \cosh \frac{n\pi z}{2a} \right\}$$

$$= G\vartheta \left\{ 2y - \frac{16a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1}{\cosh \frac{n\pi}{2a} b} \right) \sin \frac{n\pi y}{2a} \cosh \frac{n\pi z}{2a} \right\} \cdots \cdots (19.3)$$

図-19.1 矩形棒の断面

(3) 境界条件の確認

式(19.1)で表せられる応力関数 f_{ai} が断面周縁で境界条件 $f_{ai}=0$ を満足することを確認する。

式(19.1)は $y=a$ において,

$$f_{ai} = G\vartheta \left\{ \left(a^2 - a^2 \right) - \frac{32h^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1}{\cosh \frac{n\pi}{2a} b} \right) \cos \frac{n\pi a}{2a} \cosh \frac{n\pi z}{2a} \right\}$$

$$= G\vartheta \left\{ (0) - \frac{32a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1}{\cosh \frac{n\pi}{2a} b} \right) \cdot 0 \cdot \cosh \frac{n\pi z}{2a} \right\} = 0 \rightarrow \text{OK} \cdots \cdots (19.4)$$

式(19.1)は $z = b$ において、

$$f_{ai} = G\vartheta \left[\left(a^2 - y^2 \right) - \frac{32a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1}{\cosh \frac{n\pi}{2a} b} \right) \cos \frac{n\pi y}{2a} \cosh \frac{n\pi b}{2a} \right] \dots \dots \quad (19.5)$$

上式の両辺を $G\vartheta$ で除して無次元化すると、

$$\frac{f_{ai}}{G\vartheta} = \left(a^2 - y^2 \right) - \frac{32a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{n\pi y}{2a} \dots \dots \quad (19.6)$$

数値計算によって、上式が 0 となることを確認する。 $a = 1$ として、 n を第5項までとった場合の $y = 0.0 \sim 1.0$ における値。 $a = 1$ として、 n を第3項までとった場合、 $a = 10$ として、 n を第3項までとった場合の値を表-19.1に示す。これより3項までの級数展開でも誤差0.3%以下で境界条件が満たされていることが分かる。

| 表-19.1 式(19.6)の $f_{ai}/G\vartheta$ の値 | | | | | |
|--|------|--------|-------------------------|-------------------------|-------------|
| a | y | % | 残差/a^2 | 残差 | n |
| | | | $\hat{a}^2 - \hat{x}^2$ | $(-1)^{(n-1)/2}$ | 1 |
| | | | $-\Sigma$ | $\hat{a}^2 - \hat{y}^2$ | $'-\Sigma'$ |
| 1.0 | 0.0 | 0.049% | 0.000 | 1.000 | -1.000 |
| 1.0 | 0.2 | 0.051% | 0.001 | 0.960 | -0.959 |
| 1.0 | 0.4 | 0.058% | 0.001 | 0.840 | -0.841 |
| 1.0 | 0.6 | 0.072% | 0.001 | 0.640 | -0.639 |
| 1.0 | 0.8 | 0.097% | 0.001 | 0.360 | -0.361 |
| 1.0 | 1.0 | 0.000% | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 1.0 | 0.0 | 0.208% | 0.002 | 1.000 | -1.002 |
| 1.0 | 0.2 | 0.093% | 0.001 | 0.960 | -0.959 |
| 1.0 | 0.4 | 0.150% | 0.001 | 0.840 | -0.839 |
| 1.0 | 0.6 | 0.298% | 0.003 | 0.640 | -0.643 |
| 1.0 | 0.8 | 0.190% | 0.002 | 0.360 | -0.358 |
| 1.0 | 1.0 | 0.000% | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 10.0 | 0.0 | 0.208% | 0.208 | 100.000 | -100.208 |
| 10.0 | 2.0 | 0.093% | 0.093 | 96.000 | -95.907 |
| 10.0 | 4.0 | 0.150% | 0.150 | 84.000 | -83.850 |
| 10.0 | 6.0 | 0.298% | 0.298 | 64.000 | -64.298 |
| 10.0 | 8.0 | 0.190% | 0.190 | 36.000 | -35.810 |
| 10.0 | 10.0 | 0.000% | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

(4) 微分方程式を満足するかの確認

式(19.1)で表される応力関数 f_{ai} が式(5.5)の微分方程式を満たすことを確認する。

式(19.2)をさらに z で微分して、

$$\frac{\partial^2 f_{ai}}{\partial z^2} = G\vartheta \left[-\frac{32a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1}{\cosh \frac{n\pi}{2a} b} \right) \cos \frac{n\pi y}{2a} \left(\frac{n\pi}{2a} \frac{n\pi}{2a} \right) \cosh \frac{n\pi z}{2a} \right]$$

$$= G\vartheta \left\{ -\frac{32a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1}{\cosh \frac{n\pi}{2a} b} \right) \frac{n^2 \pi^2}{4a^2} \cos \frac{n\pi y}{2a} \cosh \frac{n\pi z}{2a} \right\} \cdots \cdots \quad (19.7)$$

式(19.3)をさらに y で微分して,

$$\frac{\partial^2 f_{ai}}{\partial y^2} = G\vartheta \left\{ -2 - \frac{32a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1}{\cosh \frac{n\pi}{2a} b} \right) \left(-\frac{n\pi}{2a} \right) \left(\frac{n\pi}{2a} \right) \cos \frac{n\pi y}{2a} \cosh \frac{n\pi z}{2a} \right\}$$

$$= G\vartheta \left\{ -2 + \frac{32a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1}{\cosh \frac{n\pi}{2a} b} \right) \frac{n^2 \pi^2}{4a^2} \cos \frac{n\pi y}{2a} \cosh \frac{n\pi z}{2a} \right\} \cdots \cdots \quad (19.8)$$

式(19.7)と(19.8)を辺々加えると次のようになり, 式(5.5)が満足されることが分かる.

$$\frac{\partial^2 f_{ai}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_{ai}}{\partial z^2} = -2G\vartheta \cdots \cdots \quad (19.9)$$

(5) ねじり定数

式(5.10)₃ からねじりモーメント T_s と応力関数 f_{ai} の関係は,

$$T_s = 2 \iint_A f_{ai}(y, z) dy dz \cdots \cdots \quad (19.10)$$

式(5.14)から T_s とねじり率 ϑ の関係は,

$$T_s = GJ\vartheta \cdots \cdots \quad (19.11)$$

積分範囲 $-a \leq y \leq a, -b \leq z \leq b$ に注意すると, 式(19.10)は(19.11)と等値して,

$$T_s = 2 \int_{-b}^b \int_{-a}^a f_{ai} dy dz = GJ\vartheta \cdots \cdots \quad (19.12)$$

上式をねじり定数 J について解けば,

$$J = \frac{2}{G\vartheta} \int_{-b}^b \int_{-a}^a f_{ai} dy dz \cdots \cdots \quad (19.13)$$

上式に式(19.1)を代入して,

$$J = 2 \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left(a^2 - y^2 \right) dy dz - 2 \frac{32a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1}{\cosh \frac{n\pi}{2a} b} \right) \int_{-b}^b \int_{-a}^a \cos \frac{n\pi y}{2a} \cosh \frac{n\pi z}{2a} dy dz \cdots \cdots \quad (19.14)$$

上式を y について定積分すると,

$$J = 2 \int_{-b}^b \left[a^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_{-a}^a dz - \frac{64a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1}{\cosh \frac{n\pi}{2a} b} \right) \int_{-b}^b \left[\frac{2a}{n\pi} \sin \frac{n\pi y}{2a} \right]_{-a}^a \cosh \frac{n\pi z}{2a} dz \cdots \cdots \quad (19.15)$$

上式右辺第2項の無限級数を展開して、

$$\begin{aligned}
J &= 2 \int_{-b}^b \left\{ \left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) - \left(-a^3 + \frac{a^3}{3} \right) \right\} dz \\
&\quad - \frac{64a^2}{\pi^3} \frac{1}{1^3} (-1)^{\frac{1-1}{2}} \left(\frac{1}{\cosh \frac{1\pi}{2a} b} \right) \int_{-b}^b \left\{ \frac{2a}{1\pi} \sin \frac{1\pi a}{2a} - \frac{2a}{1\pi} \sin \left(-\frac{1\pi a}{2a} \right) \right\} \cosh \frac{1\pi z}{2a} dz \\
&\quad - \frac{64a^2}{\pi^3} \frac{1}{3^3} (-1)^{\frac{3-1}{2}} \left(\frac{1}{\cosh \frac{3\pi}{2a} b} \right) \int_{-b}^b \left\{ \frac{2a}{3\pi} \sin \frac{3\pi a}{2a} - \frac{2a}{3\pi} \sin \left(-\frac{3\pi a}{2a} \right) \right\} \cosh \frac{3\pi z}{2a} dz \\
&\quad - \frac{64a^2}{\pi^3} \frac{1}{5^3} (-1)^{\frac{5-1}{2}} \left(\frac{1}{\cosh \frac{5\pi}{2a} b} \right) \int_{-b}^b \left\{ \frac{2a}{5\pi} \sin \frac{5\pi a}{2a} - \frac{2a}{5\pi} \sin \left(-\frac{5\pi a}{2a} \right) \right\} \cosh \frac{5\pi z}{2a} dz \\
&\quad - \frac{64a^2}{\pi^3} \frac{1}{7^3} (-1)^{\frac{7-1}{2}} \left(\frac{1}{\cosh \frac{7\pi}{2a} b} \right) \int_{-b}^b \left\{ \frac{2a}{7\pi} \sin \frac{7\pi a}{2a} - \frac{2a}{7\pi} \sin \left(-\frac{7\pi a}{2a} \right) \right\} \cosh \frac{7\pi z}{2a} dz \dots \dots \dots
\end{aligned} \tag{19.16}$$

$$\begin{aligned}
J = & 2 \int_{-b}^b \frac{4a^3}{3} dz \\
& - \frac{64a^2}{\pi^3} \frac{1}{1^3} \left(\frac{1}{\cosh \frac{1\pi}{2a} b} \right) \int_{-b}^b \left(1 \left(\frac{4a}{1\pi} \sin \frac{\pi}{2} \right) \cosh \frac{1\pi z}{2a} dz \right. \\
& \left. - \frac{64a^2}{\pi^3} \frac{1}{3^3} \left(\frac{1}{\cosh \frac{3\pi}{2a} b} \right) \int_{-b}^b \left(-1 \left(\frac{4a}{3\pi} \sin \frac{3\pi}{2} \right) \cosh \frac{3\pi z}{2a} dz \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{64a^2}{\pi^3} \frac{1}{5^3} \left(\frac{1}{\cosh \frac{5\pi}{2a} b} \right) \int_{-b}^b \left(1 \left(\frac{4a}{5\pi} \sin \frac{5\pi}{2} \right) \cosh \frac{5\pi z}{2a} dz \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{64a^2}{\pi^3} \frac{1}{7^3} \left(\frac{1}{\cosh \frac{7\pi}{2a} b} \right) \int_{-b}^b \left(-1 \left(\frac{4a}{7\pi} \sin \frac{7\pi}{2} \right) \cosh \frac{7\pi z}{2a} dz \dots \dots \dots \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \dots \dots \dots \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

上式を z について定積分すると、

$$\begin{aligned}
J = & 2 \frac{4a^3}{3} [z]_{-b}^b \\
& - \frac{64a^2}{\pi^3} \frac{1}{1^3} \left(\frac{1}{\cosh \frac{1\pi}{2a} b} \right) \int_{-b}^b \left(1 \right) \left(\frac{4a}{\pi} \right) (1) \cosh \frac{1\pi z}{2a} dz - \frac{64a^2}{\pi^3} \frac{1}{3^3} \left(\frac{1}{\cosh \frac{3\pi}{2a} b} \right) \int_{-b}^b \left(-1 \right) \left(\frac{4a}{3\pi} \right) (-1) \cosh \frac{3\pi z}{2a} dz \\
& - \frac{64a^2}{\pi^3} \frac{1}{5^3} \left(\frac{1}{\cosh \frac{5\pi}{2a} b} \right) \int_{-b}^b \left(1 \right) \left(\frac{4a}{5\pi} \right) (1) \cosh \frac{5\pi z}{2a} dz - \frac{64a^2}{\pi^3} \frac{1}{7^3} \left(\frac{1}{\cosh \frac{7\pi}{2a} b} \right) \int_{-b}^b \left(-1 \right) \left(\frac{4a}{7\pi} \right) (-1) \cosh \frac{7\pi z}{2a} dz \dots \dots \dots \\
& \dots \dots \dots (19.18)
\end{aligned}$$

上式の右辺第2項以降は下記級数表示ができるため、

$$J = 2 \frac{4a^3}{3} 2b - \frac{64a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^\infty \frac{1}{n^3} \left(\frac{1}{\cosh \frac{n\pi}{2a} b} \right) \int_{-b}^b \left(\frac{4a}{n\pi} \right) \cosh \frac{n\pi z}{2a} dz \dots \dots \quad (19.19)$$

$$\begin{aligned}
J &= \frac{16ba^3}{3} - \frac{64a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(\frac{1}{\cosh \frac{n\pi}{2a} b} \right) \left[\left(\frac{4a}{n\pi} \right) \left(\frac{2a}{n\pi} \right) \sinh \frac{n\pi z}{2a} \right]_b^b \\
&= \frac{16ba^3}{3} - \frac{64a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(\frac{1}{\cosh \frac{n\pi}{2a} b} \right) 2 \left(\frac{2a}{n\pi} \right)^2 \left(\sinh \frac{n\pi b}{2a} - \sinh \left(-\frac{n\pi b}{2a} \right) \right) \\
&= \frac{16ba^3}{3} - \frac{64a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(\frac{1}{\cosh \frac{n\pi}{2a} b} \right) 2 \left(\frac{2a}{n\pi} \right)^2 2 \left(\sinh \frac{n\pi b}{2a} \right) \\
&= \frac{16ba^3}{3} - \frac{16 \cdot 64a^4}{\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi b}{2a} \quad \dots \dots \dots \quad (19.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J &= \frac{16ba^3}{3} \left(1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{a}{b} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi b}{2a} \right) \\
&= \frac{2b(2a)^3}{3} \left(1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{a}{b} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi b}{2a} \right) \quad \dots \dots \dots \quad (19.21) \\
&= 2b(2a)^3 k_1 \quad \dots \dots \dots \quad (19.22)
\end{aligned}$$

ここに, k_1 は以下である.

$$k_1 = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{a}{b} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi b}{2a} \right) \quad \dots \dots \dots \quad (19.23)$$

式(19.22)の関係を式(19.11) $T_s = GJ\vartheta$ に代入して,

$$T_s = G\vartheta 2b(2a)^3 k_1 \quad \dots \dots \dots \quad (19.24)$$

上式を ϑ について解くと,

$$\vartheta = \frac{T_s}{G2b(2a)^3 k_1} \quad \dots \dots \dots \quad (19.25)$$

b/a の変化に伴う k_1 の値を表-19.2 にまとめた. $b/a \rightarrow \infty$ にすると, $k_1 \rightarrow 0.3333 = 1/3$ となりこの結果は 2.12 節で示した薄板の純ねじりの結果と一致する.

(6) 最大せん断応力

最大せん断応力は応力関数 f_{ai} の最大勾配の位置に発生し, 長方形断面の対称性と石鹼膜の形状を考慮すると, その最大値は $y = \pm a$, $z = 0$ の y 方向に生じることが見いだされる. 最大応力はこの地点での τ_{xz} となり, 式(19.3)を用いて計算される. なお, $y = \pm a$ に沿って z 方向の勾配は 0 であるから τ_{xy} は 0 である.

at $y = \pm a$, $z = 0$

$$\tau_{xz \max} = G\vartheta \left\{ 2a - \frac{16a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1}{\cosh \frac{n\pi}{2a} b} \right) \sin \frac{n\pi a}{2a} \cosh \frac{n\pi 0}{2a} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (19.26)$$

$$\begin{aligned}
&= G \vartheta \left\{ 2a - \frac{16a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{\cosh \frac{n\pi}{2a} b} \right) (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin \frac{n\pi}{2} \cdot 1 \right\} \\
&= G \vartheta \left\{ 2a - \frac{16a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{\cosh \frac{n\pi}{2a} b} \right) \right\} \\
\tau_{xz \max} &= 2G \vartheta a \left\{ 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{\cosh \frac{n\pi}{2a} b} \right) \right\} = 2G \vartheta a k \quad \dots\dots (19.27)
\end{aligned}$$

ここに, k は以下である.

$$k = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{\cosh \frac{n\pi}{2a} b} \right) \dots\dots (19.28)$$

式(19.27)に(19.25)を代入すると,

$$\tau_{xz \ max} = 2G \vartheta a k = 2G \frac{T_s}{G2b(2a)^3 k_1} a k = \frac{T_s}{2b(2a)^2 k_1} k = \frac{T_s}{2b(2a)^2 k_2} \dots\dots (19.29)$$

ここに, k_2 は以下である.

$$k_2 = \frac{k_1}{k} \dots\dots (19.30)$$

b/a の変化に伴う k_2 の値を表-19.2 にまとめる.

表-19.2 矩形断面の b/a の変化に伴う係数の変化

| b/a | k_1 | k | k_2 |
|-------|--------|--------|--------|
| 1.0 | 0.1406 | 0.6753 | 0.2082 |
| 1.5 | 0.1958 | 0.8476 | 0.2310 |
| 2.0 | 0.2287 | 0.9301 | 0.2459 |
| 2.5 | 0.2494 | 0.9681 | 0.2576 |
| 3.0 | 0.2633 | 0.9854 | 0.2672 |
| 4.0 | 0.2808 | 0.9970 | 0.2817 |
| 6.0 | 0.2983 | 0.9999 | 0.2984 |
| 10.0 | 0.3123 | 1.0000 | 0.3123 |
| 100.0 | 0.3333 | 1.0000 | 0.3333 |

付録-2.A せん断ひずみとせん断応力の定義

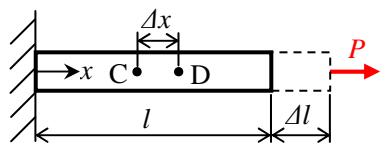
せん断ひずみとせん断応力の定義について述べる。

図-A.1 は 1 次元の棒材の伸び Δl と作用力 P を示したもので、微小要素 CD では要素長 Δx 中での伸びを Δu としたとき直ひずみ ϵ は $\epsilon = \Delta u / \Delta x$ として定義される。

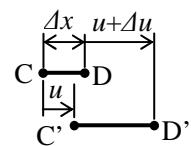
図-A.2 は 2 次元での直ひずみの定義を示し、微小要素 ABCD が長方形の形を維持しつつ併進変位して A'B'C'D' へ移動することを考える、点 A が A' へ x 方向に u , y 方向に v 変位し、点 C が C' へ x 方向に $u + (\partial u / \partial x)dx$, y 方向に $v + (\partial v / \partial y)dy$ 変位したとき、直ひずみとして、 x 方向には $\epsilon_x = \partial u / \partial x$, y 方向には $\epsilon_y = \partial v / \partial y$ として定義される。直ひずみと直応力の関係を図-A.3 に示す。ポアソン比の影響を無視すると x 方向の直応力 σ_x によって x 方向のひずみ ϵ_x が発生し、 y 方向の直応力 σ_y によって y 方向のひずみ ϵ_y が発生することを示している。なお、相対する面のうち座標軸に関して正側の面に作用する応力を'を付し、さらにこの応力の方向を座標軸の正方向としている。また、図-A.4 には 3 次元における直応力と変位の関係を示している。ポアソン比の影響を無視すると、例えば y - z 面に作用する σ_x によって x 方向の伸びが生じその結果、 x 方向のひずみ ϵ_x が生じる。このように同じ添え字で表記される直ひずみと直応力について、その方向は同じと定義される。

次にせん断ひずみ、せん断応力について説明する。これらは 1 次元では定義できない。図-A.5 は 2 次元でのせん断ひずみの定義を示し、微小要素 ABCD が長方形から A'B'C'D' の平行四辺形になることを示している。変位には併進変位と回転変位があり、併進変位は既に直ひずみで考えたので、ここでは回転変位のみを考える。回転は面という広がりが無ければ定義できず、従って、せん断ひずみは 1 次元では定義できない。回転変位に伴う角 DAB の角度の変化に着目する。点 B の微小回転に伴う変位は y 方向に $(\partial v / \partial x) \cdot dx$ である。このとから角度変化 B'AB は $\partial v / \partial x$ となる。一方、点 D の微小回転に伴う変位は x 方向に $(\partial u / \partial y) \cdot dy$ である。このとから角度変化 D'AD は $\partial u / \partial y$ となる。角度の合計の変化がせん断ひずみ γ_{xy} であり、例えばそれは AB' に直交する線分を引いたとき、この線分と AD' とのなす角となる。すなわち合計値は、 $\gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x$ となる。また、添え字はひずみの生じる面を示す。

さて、このような変形を生じさせる応力を図-A.6 に示す。このような変形は CB に作用する τ_{xy}' と CD に作用する τ_{yx}' が対になってはじめて生じる変形である。ちなみに別途資料で説明するが τ_{xy}' と τ_{yx}' には共役性が存在し、 $\tau_{xy}' = \tau_{yx}'$ である。添え字について、例えば xy は x 軸に直交する面内で y 方向に作用することを示す。また、記号'については直応力と同様に、相対する面のうち座標軸に関して正側の面に作用する応力を意味し、さらにこの応力の方向を 2 番目の添え字の座標軸の正方向としている。重要なことはせん断ひずみは回転を表す角度であり回転方向であるのに対して、せん断応力はそれが作用する面と方向を有していることである。このことは直ひずみ、直応力が同じ方向で定義されたことと異なり説明を複雑にする。即ち、せん断ひずみは 2 つの添え字でそれが発生する面を示し、せん断応力の添え字はその 1 つ目がその応力が作用する面に垂直な軸を、そして 2 つ目がその応力の作用方向を示しているということである。このことは図-A.7 に示す 3 次元要素に作用するせん断応力を観察することでより明確に捉えられる。例えば影を付けた x - y 面にせん断ひずみ γ_{xy} を生じさせるには、 y - z 面面上の τ_{xy}' と x - z 面面上の τ_{yx}' が対になって作用する必要がある。蛇足になるが留意事項を一点挙げる。棒材の純ねじりにおいて断面が y - z 面にあるとき y - z 面面上に作用するせん断応力 τ_{xy}' と τ_{xz}' は断面 y - z 内のせん断ひずみ γ_{yz} を生ずるものではなく、そのた純ねじりが生じても棒軸方向のいかなる断面においても等断面が維持される。



(a) 軸力を受ける棒部材



(b) 微小要素の変位

図-A.1 部材軸方向の変位

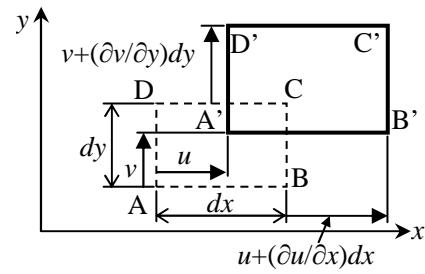


図-A.2 2次元の直ひずみと変形

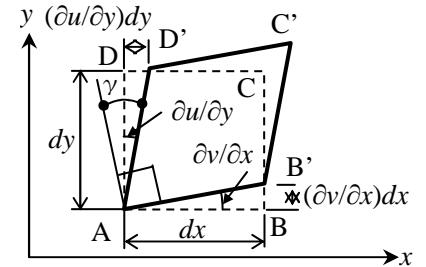


図-A.5 せん断ひずみと変形

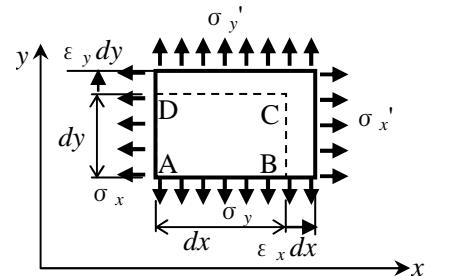


図-A.3 2次元の直ひずみと直応力

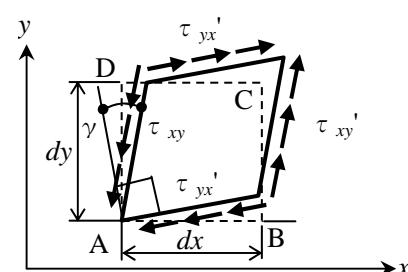


図-A.6 2次元のせん断ひずみとせん断応力

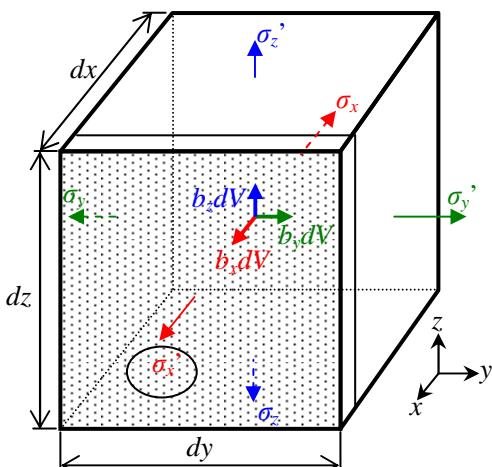


図-A.4 微小要素に作用する直応力と体積力

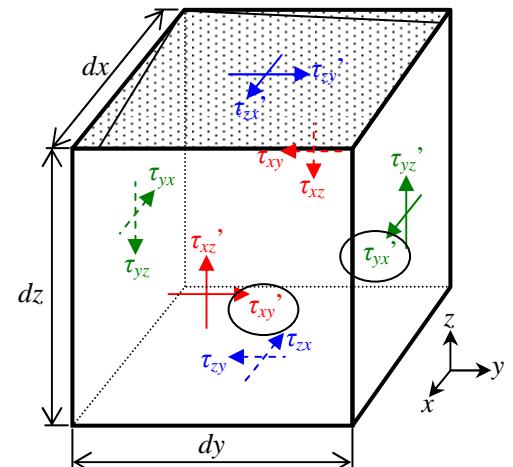


図-A.7 微小要素に作用するせん断応力

付録-2.B ラプラス演算の直交座標系から極座標系への変換

直交座標と極座標の関係および直交座標の導関数を示す。

$$y = r \cos \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \sin \theta \cdots \cdots (\text{B.1})_{1,2,3}$$

$$z = r \sin \theta, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \sin \theta, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = r \cos \theta \cdots \cdots (\text{B.2})_{1,2,3}$$

極座標と直交座標の関係を示すと、

$$r = \sqrt{y^2 + z^2} \cdots \cdots (\text{B.3})$$

$$\tan \theta = \frac{z}{y} \cdots \cdots (\text{B.4})$$

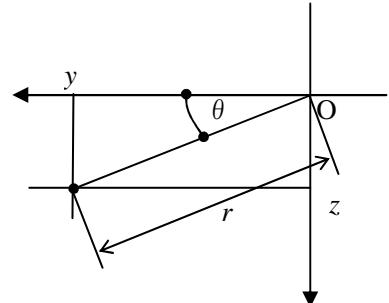


図-B.1 直交座標と極座標

偏導関数を列記すると、

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 + z^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2y}{2(y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{r \cos \theta}{r} = \cos \theta \cdots \cdots (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(y^2 + z^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2z}{2(y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{r \sin \theta}{r} = \sin \theta \cdots \cdots (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\tan^{-1} \frac{z}{y} \right) = \frac{1}{1 + \frac{z^2}{y^2}} \left(-\frac{z}{y^2} \right) = -\frac{z}{y^2 + z^2} = -\frac{r \sin \theta}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r} \cdots \cdots (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\tan^{-1} \frac{z}{y} \right) = \frac{1}{1 + \frac{z^2}{y^2}} \left(-\frac{1}{y} \right) = \frac{y}{y^2 + z^2} = \frac{r \cos \theta}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r} \cdots \cdots (\text{B.8})$$

2次元の微分公式は、

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} = f_y \cdots \cdots (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} = f_z \cdots \cdots (\text{B.10})$$

f の y による2階微分を y により1階微分した f_y のさらなる微分と見なし、式(B.9)の f を f_y に置き代えた2次元の微分公式を適用すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f_y = \left(\frac{\partial}{\partial r} f_y \right) \cos \theta - \left(\frac{\partial}{\partial \theta} f_y \right) \frac{\sin \theta}{r} \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right) \right\} \cos \theta - \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right) \right\} \frac{\sin \theta}{r} \end{aligned} \cdots \cdots (\text{B.11})$$

式(B.17)~(B.21)に示す3関数の積に対する偏微分公式を参照して、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \cos \theta - \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} r^{-1} \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial \theta} r^{-2} \sin \theta \right) \cos \theta - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} \cos \theta - \frac{\partial f}{\partial r} \sin \theta - \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} r^{-1} \sin \theta - \frac{\partial f}{\partial \theta} r^{-1} \cos \theta \right) \frac{\sin \theta}{r} \quad \dots \dots \dots \text{(B.12)}$$

f の z による 2 階微分を z により 1 階微分した f_z のさらなる微分と見なし、式(B.10)の f を f_z に置き代えた 2 次元の微分公式を適用すると、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} f_z = \frac{\partial}{\partial r} f_z \sin \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} f_z \frac{\cos \theta}{r} \quad \dots \dots \text{(B.13)}$$

$$= \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \right) \right\} \sin \theta + \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \right) \right\} \frac{\cos \theta}{r}$$

式(B.17)~(B.21)に示す 3 関数の積に対する偏微分公式を参照して、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \sin \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} r^{-1} \cos \theta - \frac{\partial f}{\partial \theta} r^{-2} \cos \theta \right) \sin \theta + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} r^{-1} \cos \theta - \frac{\partial f}{\partial \theta} r^{-1} \sin \theta \right) \frac{\cos \theta}{r} \quad \dots \dots \text{(B.14)}$$

式(B.12), (B.14)を合計して展開すると、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \cos \theta - \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} r^{-1} \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial \theta} r^{-2} \sin \theta \right) \cos \theta - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} \cos \theta - \frac{\partial f}{\partial r} \sin \theta - \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} r^{-1} \sin \theta - \frac{\partial f}{\partial \theta} r^{-1} \cos \theta \right) \frac{\sin \theta}{r} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \sin \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} r^{-1} \cos \theta - \frac{\partial f}{\partial \theta} r^{-2} \cos \theta \right) \sin \theta + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} r^{-1} \cos \theta - \frac{\partial f}{\partial \theta} r^{-1} \sin \theta \right) \frac{\cos \theta}{r} \quad \dots \dots \text{(B.15)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \sin^2 \theta - \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} r^{-1} \sin \theta \cos \theta - \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} r^{-1} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} r^{-1} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} r^{-1} \sin \theta \cos \theta \\ &+ \frac{\partial f}{\partial \theta} r^{-2} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial \theta} r^{-2} \sin \theta \cos \theta - \frac{\partial f}{\partial \theta} r^{-2} \sin \theta \cos \theta - \frac{\partial f}{\partial \theta} r^{-2} \sin \theta \cos \theta \\ &+ \frac{\partial f}{\partial r} r^{-1} \sin^2 \theta + \frac{\partial f}{\partial r} r^{-1} \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} r^{-2} \sin^2 \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} r^{-2} \cos^2 \theta \end{aligned}$$

式(B.15)の右辺 1,8 項, 5,12 項, 6,13 項が残留し、さらに $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ を考慮すると、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \quad \dots \dots \text{(B.16)}$$

上記がラプラス演算の直交座標系から極座標系への変換式である。

偏微分公式の確認

$$f = u \cdot v \cdot w = u(r, \theta) \cdot v(r) \cdot w(\theta) \quad \dots \dots \text{(B.17)}$$

のとき、

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \{u(r, \theta) \cdot v(r) \cdot w(\theta)\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial r} u(r, \theta) \right\} \cdot v(r) \cdot w(\theta) + u(r, \theta) \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial r} v(r) \right\} \cdot w(\theta) + u(r, \theta) \cdot v(r) \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial r} w(\theta) \right\} \quad \dots \dots \text{(B.18)}$$

$$= \left\{ \frac{\partial}{\partial r} u(r, \theta) \right\} \cdot v(r) \cdot w(\theta) + u(r, \theta) \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial r} v(r) \right\} \cdot w(\theta) + u(r, \theta) \cdot v(r) \cdot 0$$

$$= \left\{ \frac{\partial}{\partial r} u(r, \theta) \right\} \cdot v(r) \cdot w(\theta) + u(r, \theta) \left\{ \frac{\partial}{\partial r} v(r) \right\} \cdot w(\theta) \dots \dots \dots \text{(A.19)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \{ u(r, \theta) \cdot v(r) \cdot w(\theta) \} = \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} u(r, \theta) \right\} \cdot v(r) \cdot w(\theta) + u(r, \theta) \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} v(r) \right\} \cdot w(\theta) + u(r, \theta) \cdot v(r) \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} w(\theta) \right\} \dots \dots \dots \text{(B.20)}$$

$$= \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} u(r, \theta) \right\} \cdot v(r) \cdot w(\theta) + u(r, \theta) \cdot 0 \cdot w(\theta) + u(r, \theta) \cdot v(r) \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} w(\theta) \right\}$$

$$= \left\{ \frac{\partial}{\partial r} u(r, \theta) \right\} \cdot v(r) \cdot w(\theta) + u(r, \theta) \cdot v(r) \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} w(\theta) \right\} \dots \dots \dots \text{(B.21)}$$

付録-2.C 一周積分

一周積分の積分方法を解説する。簡単のため折れ閉直線の例を用いて説明するが、曲線の場合は曲線が無限に短い折れ直線の集合と考え、分割数 $k \rightarrow \infty$ とすれば閉曲線に対しても以下の説明が適用できる。

図-C.1 に示すように積分の経路に沿って s 座標をとり閉直線を一周する線積分を考える。

$$\oint ds = \sum_{i=1}^k \int_i^{i+1} ds = \sum_{i=1}^k [s]_i^{i+1} = \sum_{i=1}^k l_i = s_o \cdots \cdots \text{(C.1)}$$

上記では閉直線を $i = 1 \sim k$ までの折れ線に分割し、第 i 番目の線素の長さを l_i と表記している。結果的に上記の一周積分は全周長 s_o になる。

次に定められた一点と線分の間の足の長さ r_i を積分の経路長 ds に乘じる面積分を考える。定められた一点が閉直線の内側にある場合も、外側にある場合も結果が同じになり、閉直線で囲まれる多角形の面積の 2 倍、 $2A_o$ になることを示す。このことを式に書き出すと以下となる。

$$\oint rds = \sum_{i=1}^k \int_i^{i+1} r_i ds = \sum_{i=1}^k r_i [s]_i^{i+1} = \sum_{i=1}^k r_i l_i = \sum_{i=1}^k 2\triangle OP_i P_{i+1} = 2A_o \cdots \cdots \text{(C.2)}$$

上記では、ある一点から各辺に下した垂線の長さを r_i として、その辺の両端の頂点を P_i と P_{i+1} とするとき、その辺に対応した積分が $\triangle OP_i P_{i+1}$ の 2 倍の面積となり、そのことを全ての辺に対して繰り返すことで閉直線が囲む多角形の面積の 2 倍、 $2A_o$ になることを示している。

以上の計算を具体的に三角形の面積の和として示す。最初に**図-C.2** に示すように定められた一点 O_1 が閉直線の内側にある場合を示す。四角形の頂点を A, B, C, D として O_1 から各辺に下した垂線の足を H_1, H_2, H_3, H_4 とする。この積分は以下のように表現できる。

$$\begin{aligned} \oint rds &= \overline{O_1 H_1} \cdot \overline{AB} + \overline{O_1 H_2} \cdot \overline{BC} + \overline{O_1 H_3} \cdot \overline{CD} + \overline{O_1 H_4} \cdot \overline{DA} \\ &= 2\triangle O_1 AB + 2\triangle O_1 BC + 2\triangle O_1 CD + 2\triangle O_1 DA = 2A_o \end{aligned} \cdots \cdots \text{(C.3)}$$

次に前述と同じ多角形 $ABCD$ に対して、定められた一点 O_2 が閉直線の外側にある場合を示す。各辺に下した垂線の足を H'_1, H'_2, H'_3, H'_4 とする。この積分は以下のように表現できる。**図-C.3(a)** は辺 AB に対する積分を、**同図(b)** は辺 BC, CD, DA の積分を示している。

$$\begin{aligned} \oint rds &= -\overline{O_2 H'_1} \cdot \overline{AB} + \overline{O_2 H'_2} \cdot \overline{BC} + \overline{O_2 H'_3} \cdot \overline{CD} + \overline{O_2 H'_4} \cdot \overline{DA} \\ &= -2\triangle O_2 AB + 2\triangle O_2 BC + 2\triangle O_2 CD + 2\triangle O_2 DA = 2A_o \end{aligned} \cdots \cdots \text{(C.4)}$$

ここで第一項に負記号が付く理由は積分の方向 **A から B に向かって見た時**、 O_2 が右側にあるためである。他の辺については全て**積分の方向に向かって見た時**、 O_2 が左側にある。このことは最初の例についても同様で全ての辺に対して定められた一点 O_1 は積分の方向に**向かった時**、左側にある。このことは式(C.2)に立ち返ったとき、積分の経路に向って立った時、定められた一点が左側にある時は r_i を正とし、右側にある時は負とすることに相当する。**図-C.4** に経路が曲線の場合の r の正負の考え方を示す。

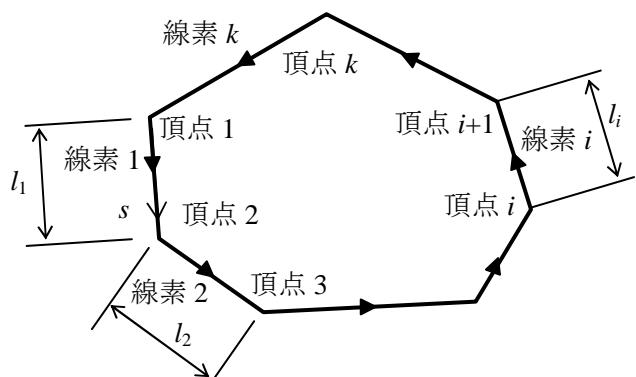


図-C.1 一周線積分

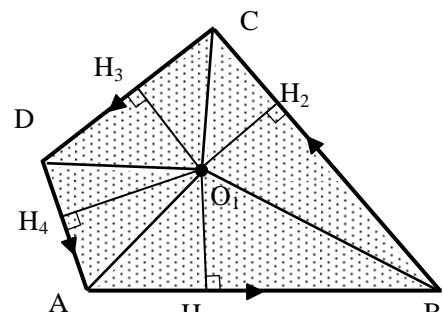
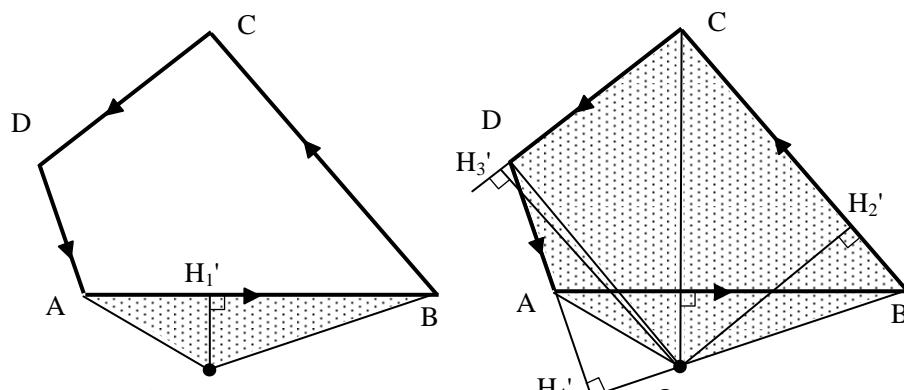


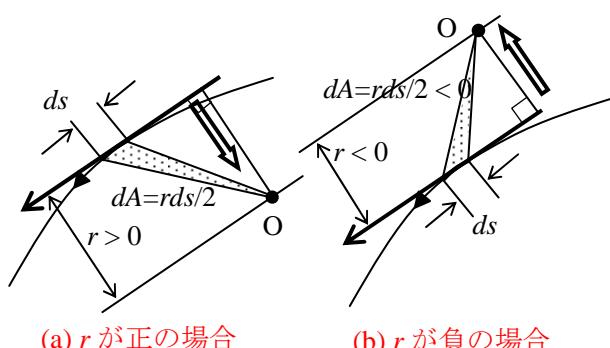
図-C.2 内点回りの一周面積分



(a) A→B の積分

(b) B→C→D→A の積分

図-C.3 外点回りの一周面積分



(a) r が正の場合

(b) r が負の場合

図-C.4 曲線面積分の r の正負

付録ー2.D 矩形棒の応力関数の誘導

(1) 特解と一般解

2.5節で紹介したように、式(5.5)で表される純ねじり問題の応力関数 f_{ai} は断面内で以下の条件を満たす必要がある。

$$\frac{\partial^2 f_{ai}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_{ai}}{\partial z^2} = -2G\vartheta$$

これをラプラスアン ∇^2 を用いて表示すると、

$$\nabla^2 f_{ai} = -2G\vartheta \cdots \cdots (\text{D.1})$$

ただし、境界条件として断面の周縁で式(5.7)を満足する必要がある。

$$f_{ai} = 0 \cdots \cdots (\text{D.2})$$

矩形断面に対する応力関数の解は、2.12節で示したように、式(12.3)で表せられる薄板の純ねじりの応力関数 f_{ai} を特解に含む必要がある。

式(12.3)の薄板の純ねじりの応力関数 f_{ai} を特に f_{ai0} と表すことにすれば、

$$f_{ai0}(y, z) = G\vartheta \left(\frac{t^2}{4} - y^2 \right)$$

図-D.1に示すような矩形断面では、 $t \rightarrow 2a$ となるので上式は、

$$f_{ai0}(y, z) = G\vartheta \left(\frac{4a^2}{4} - y^2 \right) \cdots \cdots (\text{D.3})$$

これより、

$$f_{ai0}(y, z) = G\vartheta(a^2 - y^2) \cdots \cdots (\text{D.4})$$

したがって、矩形断面に対する応力関数の一般解を f_{ai} と表すことになると、 f_{ai} は新たな関数 f_v を用いて $f_{ai}(y, z) = G\vartheta(a^2 - y^2) + f_v(y, z) \cdots \cdots (\text{D.5})$

という形をとる必要がある。

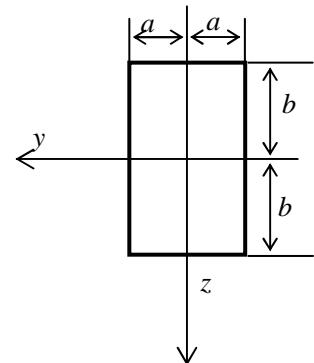


図-D.1 矩形棒の断面

(2) 境界条件の導入

式(D.5)を(D.1)に代入して、

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \{G\vartheta(a^2 - y^2) + f_v(y, z)\} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{G\vartheta(a^2 - y^2) + f_v(y, z)\} = -2G\vartheta$$

上式左辺の偏微分を実行すると、

$$-2G\vartheta + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{f_v(y, z)\} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{f_v(y, z)\} = -2G\vartheta$$

よって全断面において、

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \{f_v(y, z)\} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{f_v(y, z)\} = \nabla^2 f_v = 0 \cdots \cdots (\text{D.6})$$

また、周縁において

$y = \pm a$ では式(D.2)を満足する必要があり、

$$f_{ai}(\pm a, z) = G\vartheta(a^2 - a^2) + f_v(\pm a, z) = f_v(\pm a, z) = 0$$

すなわち、

$$f_v(\pm a, z) = 0 \cdots \cdots (\text{D.7})$$

$z = \pm b$ でも式(D.2)を満足する必要があり,

$$f_{ai}(y, \pm b) = G \vartheta(a^2 - y^2) + f_v(y, \pm b) = 0$$

すなわち,

$$f_v(y, \pm b) = G \vartheta(y^2 - a^2) \cdots \cdots \quad (D.8)$$

式(D.6)～(D.8)を満足する方程式 f_v の解を求めるに際して、次のように変数の分離を行う。

$$f_v(y, z) = g_y(y) \cdot g_z(z) \cdots \cdots \quad (D.9)$$

この関係を式(D.6)に代入すると、

$$\nabla^2 f_v = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{g_y(y) \cdot g_z(z)\} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{g_y(y) \cdot g_z(z)\} = g_y'' \cdot g_z + g_y \cdot g_z'' = 0 \quad \dots \dots \quad (\text{D.10})$$

ここに、 $g_y'' = \frac{\partial^2}{\partial y^2} g_y$, $g_z'' = \frac{\partial^2}{\partial z^2} g_z$ である.

上式を変形して関数の比を $-\lambda^2$ とすると、

$$\frac{g_y}{g_v} = -\frac{g_z}{g_z} = -\lambda^2 \dots \dots \dots \quad (D.11)$$

ここに、 λ は正の定数である.

したがって、変数分離された結果は以下となる。

$$g_y'' + \lambda^2 g_y = 0 \cdots \cdots \text{(D.12)}$$

$$g_z'' - \lambda^2 g_z = 0 \cdots \cdots \text{(D.13)}$$

それぞれ式(D.12), (D.13)の解は以下である.

$$g_y = A \cos \lambda y + B \sin \lambda y \cdots \cdots \cdots \text{(D.14)}$$

$$g_z = C \cosh \lambda z + D \sinh \lambda z \quad \dots \dots \quad (\text{D.15})$$

断面は2軸対称のため式(D.9)の $f_y(y,z)=g_y(y) \cdot g_z(z)$ は y, z に関して偶関数である必要がある.

このことより式(D.14), (D.15)において, $B = D = 0$ でなければならぬ.

よって、任意の係数を E として、式(D.9)を表すと、

$$f_v(y, z) = g_y \cdot g_z = E \cos \lambda y \cosh \lambda z \quad \dots \dots \quad (\text{D.16})$$

(3) 解の級数近似

式(D.16)は式(D.7)を満足しなければならないから、

$$f_v(\pm a, z) = E \cos(\pm \lambda a) \cosh(\pm \lambda a) = 0$$

$\cos(-\lambda a) = \cos(\lambda a)$ に留意すると、上記を満足する λ は以下である。

式(D.17)を(D.16)に代入すると、

重ね合わせの手法より式(D.18)を級数表示して、

$$f_v(y, z) = \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} E_n \cos\left(\frac{n\pi}{2a}y\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{2a}z\right) \cdots \cdots \text{(D.19)}$$

以下のように式(D.19)を(D.6)の左辺へ代入すると 0 となり, 式(D.19)が全断面で式(D.6)を自動的に満足することが分かる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{f_v(y, z)\} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{f_v(y, z)\} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} E_n \cos\left(\frac{n\pi}{2a}y\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{2a}z\right) \right\} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} E_n \cos\left(\frac{n\pi}{2a}y\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{2a}z\right) \right\} \\ &= \left\{ \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} -E_n \left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2 \cos\left(\frac{n\pi}{2a}y\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{2a}z\right) \right\} + \left\{ \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} E_n \left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2 \cos\left(\frac{n\pi}{2a}y\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{2a}z\right) \right\} \\ &= \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ -E_n \left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2 \cos\left(\frac{n\pi}{2a}y\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{2a}z\right) + E_n \left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2 \cos\left(\frac{n\pi}{2a}y\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{2a}z\right) \right\} = 0 \cdots \cdots \text{(D.20)} \end{aligned}$$

式(D.19)において $z=\pm b$ を代入して式(D.8)の左辺とすれば,

$$f_v(y, \pm b) = \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} E_n \cos\left(\frac{n\pi}{2a}y\right) \cosh\left(\pm \frac{n\pi}{2a}b\right) = G \vartheta(y^2 - a^2) \cdots \cdots \text{(D.21)}$$

ここで上式中の, $\cosh\left(-\frac{n\pi}{2a}b\right) = \cosh\left(\frac{n\pi}{2a}b\right)$ に留意し, 上式を書き代えると以下となる。

$$\sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} F_n \cos\left(\frac{n\pi}{2a}y\right) = G \vartheta(y^2 - a^2) \cdots \cdots \text{(D.22)}$$

ここに F_n は以下である。

$$F_n = E_n \cosh\left(\frac{n\pi}{2a}b\right) \cdots \cdots \text{(D.23)}$$

フーリエ級数の方法により, 式(D.22)の両辺に $\sum \cos(n\pi y/2a)$ を乗じて $-a \sim a$ の間で積分して係数 F_n を求める。式(D.22)の n を i と表記し, 新たに乗じる $\sum \cos(n\pi y/2a)$ の n を j で表記すれば,

$$\int_{-a}^a \left\{ \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} F_i \cos\left(\frac{i\pi}{2a}y\right) \right\} \left\{ \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \cos\left(\frac{j\pi}{2a}y\right) \right\} dy = \int_{-a}^a G \vartheta(y^2 - a^2) \left\{ \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \cos\left(\frac{j\pi}{2a}y\right) \right\} dy \cdots \cdots \text{(D.24)}$$

上式左辺の被積分関数を展開すると,

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^a \left\{ F_1 \cos\left(\frac{1\pi}{2a}y\right) + F_3 \cos\left(\frac{3\pi}{2a}y\right) + F_5 \cos\left(\frac{5\pi}{2a}y\right) + \cdots \cdots \right\} \left\{ \cos\left(\frac{1\pi}{2a}y\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2a}y\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{2a}y\right) + \cdots \cdots \right\} dy \\ &= \int_{-a}^a G \vartheta(y^2 - a^2) \left\{ \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \cos\left(\frac{j\pi}{2a}y\right) \right\} dy \\ & \cdots \cdots \text{(D.25)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\left\{ F_1 \cos\left(\frac{1\pi}{2a}y\right) \cos\left(\frac{1\pi}{2a}y\right) \right\} + \left\{ F_1 \cos\left(\frac{1\pi}{2a}y\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2a}y\right) \right\} + \left\{ F_1 \cos\left(\frac{1\pi}{2a}y\right) \cos\left(\frac{5\pi}{2a}y\right) \right\} + \dots \dots \dots \right. \\
& + \left\{ F_1 \cos\left(\frac{3\pi}{2a}y\right) \cos\left(\frac{1\pi}{2a}y\right) \right\} + \left\{ F_3 \cos\left(\frac{3\pi}{2a}y\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2a}y\right) \right\} + \left\{ F_3 \cos\left(\frac{3\pi}{2a}y\right) \cos\left(\frac{5\pi}{2a}y\right) \right\} + \dots \dots \dots \right] dy \\
& + \left. \left\{ F_5 \cos\left(\frac{5\pi}{2a}y\right) \cos\left(\frac{1\pi}{2a}y\right) \right\} + \left\{ F_5 \cos\left(\frac{5\pi}{2a}y\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2a}y\right) \right\} + \left\{ F_5 \cos\left(\frac{5\pi}{2a}y\right) \cos\left(\frac{5\pi}{2a}y\right) \right\} + \dots \dots \dots \right. \\
& \left. + \dots \dots \dots \right]
\end{aligned}$$

上式の左辺の被積分関数の各項は一般化して次のように表せる。

$$\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} I_{ij} = \int_{-a}^a G \vartheta(y^2 - a^2) \left\{ \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \cos\left(\frac{j\pi}{2a}y\right) \right\} dy \quad \dots \dots \quad (\text{D.27})$$

ここに, I_{ij} は以下の式である.

$$I_{ij} = \int_{-a}^a F_i \cos\left(\frac{i\pi}{2a}y\right) \cos\left(\frac{j\pi}{2a}y\right) dy \quad \dots \dots \quad (\text{D.28})$$

上式は三角関数の積の公式を用いた後、積分すると $i \neq j$ の場合、消滅し、 $i=j$ の場合、残存する。

この誘導式は式(D.51)～(D.57)で i, j が奇数であることに留意し、 $i = 2k-1, j = 2l-1$ を用いて説明する。

式(D.27)左辺の $i=j$ の項のみを残存させると,

上式を総和記号を用いて表すと、

$$\int_{-a}^a \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} F_j \cos^2\left(\frac{j\pi}{2a}y\right) dy = \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \int_{-a}^a G \vartheta(y^2 - a^2) \left\langle \cos\left(\frac{j\pi}{2a}y\right) \right\rangle dy \quad (\text{D.30})$$

(4) 積分の実施

式(D.30)の j の表記を n に戻して、左辺は三角関数の倍角公式、右辺は部分積分を施すと、

$$\sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \int_{-a}^a F_n \frac{1 + \cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}{2} dy = \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \left\langle \left[G \vartheta(y^2 - a^2) \frac{2a}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2a}y\right) \right]_{-a}^a - \int_{-a}^a 2G \vartheta y \frac{2a}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2a}y\right) dy \right\rangle \quad \dots \dots \text{(D.31)}$$

以下では上式の第 n 項について計算する。右辺の最終項に再度部分積分を施して、

$$F_n \left[\frac{y}{2} - \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}{2} \right]_a^a = 0 - \left[-2G\vartheta y \frac{4a^2}{n^2\pi^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2a}y\right) \right]_{-a}^a + \int_{-a}^a \left\{ -2G\vartheta \frac{4a^2}{n^2\pi^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2a}y\right) \right\} dy \dots \dots \quad (\text{D.32})$$

$$F_n a = 0 - 0 - \left[16G\vartheta \frac{a^3}{n^3\pi^3} \sin\left(\frac{n\pi}{2a}y\right) \right]_a^a$$

$$F_n a = -16G\vartheta \frac{a^3}{n^3\pi^3} \left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{2a}a\right) - \sin\left(-\frac{n\pi}{2a}a\right) \right\} \cdots \cdots \quad (\text{D.33})$$

$$F_n a = -32G\vartheta \frac{a^3}{n^3\pi^3} \sin\left(\frac{n\pi}{2}a\right) \cdots \cdots \quad (\text{D.34})$$

上式右辺において、 $n=1,3,5, \dots$ に留意すると、

$$F_n = -32G\vartheta \frac{a^2}{n^3\pi^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdots \cdots \quad (\text{D.35})$$

上式右辺を式(D.23)の左辺として、 E_n について解けば、

$$-32G\vartheta \frac{a^2}{n^3\pi^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} = E_n \cosh\left(\frac{n\pi}{2a}b\right) \cdots \cdots \quad (\text{D.36})$$

$$E_n = -\frac{32G\vartheta a^2 (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3\pi^3 \cosh\left(\frac{n\pi}{2a}b\right)} \cdots \cdots \quad (\text{D.37})$$

式(D.5)に(D.19)を代入すると、

$$f_{ai}(y, z) = G\vartheta(a^2 - y^2) + f_v(y, z) = G\vartheta(a^2 - y^2) + \sum_{1,3,5,\dots}^\infty E_n \cos\left(\frac{n\pi}{2a}y\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{2a}z\right) \cdots \cdots \quad (\text{D.38})$$

上式に式(D.37)を代入して

$$\begin{aligned} f_{ai}(y, z) &= G\vartheta(a^2 - y^2) + \sum_{1,3,5,\dots}^\infty \left\{ -\frac{32G\vartheta a^2 (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3\pi^3 \cosh\left(\frac{n\pi}{2a}b\right)} \right\} \cos\left(\frac{n\pi}{2a}y\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{2a}z\right) \\ &= G\vartheta(a^2 - y^2) - \frac{32G\vartheta a^2}{\pi^3} \sum_{1,3,5,\dots}^\infty \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3 \cosh\left(\frac{n\pi}{2a}b\right)} \cos\left(\frac{n\pi}{2a}y\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{2a}z\right) \cdots \cdots \quad (\text{D.39}) \end{aligned}$$

(5) 三角関数の直交性の利用

式(D.28)で示した下式は三角関数の積の公式を用いた後、積分すると $i \neq j$ の場合は消滅し、 $i=j$ の場合は残存する。以下にこのことを説明する。

$$I_{ij} = \int_{-a}^a F_i \cos\left(\frac{i\pi}{2a}y\right) \cos\left(\frac{j\pi}{2a}y\right) dy \cdots \cdots \quad (\text{D.51})$$

i, j については $1, 3, 5, \dots$ であるから、 $i = 2k-1, j = 2l-1, k, l = 1, 2, 3, \dots$ に置き代えると、

$$I_{ij} = \int_{-a}^a F_i \cos\left(\frac{2k-1}{2a}\pi y\right) \cos\left(\frac{2l-1}{2a}\pi y\right) dy \cdots \cdots \quad (\text{D.52})$$

三角関数和算公式より、

$$\begin{aligned}
&= F_i \int_{-a}^a \frac{1}{2} \left\{ \left[\cos\left(\frac{2k-1}{2a}\pi y\right) \cos\left(\frac{2l-1}{2a}\pi y\right) - \sin\left(\frac{2k-1}{2a}\pi y\right) \sin\left(\frac{2l-1}{2a}\pi y\right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\cos\left(\frac{2k-1}{2a}\pi y\right) \cos\left(\frac{2l-1}{2a}\pi y\right) + \sin\left(\frac{2k-1}{2a}\pi y\right) \sin\left(\frac{2l-1}{2a}\pi y\right) \right] \right\} dy \\
&= \frac{F_i}{2} \int_{-a}^a \left\{ \cos\left(\frac{2k-1}{2a}\pi y + \frac{2l-1}{2a}\pi y\right) + \cos\left(\frac{2k-1}{2a}\pi y - \frac{2l-1}{2a}\pi y\right) \right\} dy \\
&= \frac{F_i}{2} \int_{-a}^a \left\{ \cos\left(2\frac{k+l-1}{2a}\pi y\right) + \cos\left(2\frac{k-l}{2a}\pi y\right) \right\} dy \quad \cdots \cdots (\text{D.53})
\end{aligned}$$

$i \neq j$ の場合、上式中 $k \neq l$ であるから、積分を行い I_{ij} を計算すると、

$$\begin{aligned}
I_{ij} &= \frac{F_i}{2} \left\{ \frac{a}{k+l-1} \frac{1}{\pi} \left[\sin\left(\frac{k+l-1}{a}\pi y\right) \right]_{-a}^a + \frac{a}{k-l} \frac{1}{\pi} \left[\sin\left(\frac{k-l}{a}\pi y\right) \right]_{-a}^a \right\} \cdots \cdots (\text{D.54}) \\
&= \frac{F_i}{2} \left\{ \frac{a}{k+l-1} \frac{1}{\pi} \left(\sin\left(\frac{k+l-1}{a}\pi a\right) - \sin\left(\frac{k+l-1}{a}\pi(-a)\right) \right) + \frac{a}{k-l} \frac{1}{\pi} \left(\sin\left(\frac{k-l}{a}\pi a\right) - \sin\left(\frac{k-l}{a}\pi(-a)\right) \right) \right\} \\
&= \frac{F_i}{2} \left\{ \frac{a}{k+l-1} \frac{1}{\pi} (\sin(k+l-1)\pi + \sin(k+l-1)\pi) + \frac{a}{k-l} \frac{1}{\pi} (\sin(k-l)\pi + \sin(k-l)\pi) \right\} \\
&= \frac{F_i}{2} \left\{ \frac{a}{k+l-1} \frac{1}{\pi} (0+0) + \frac{a}{k-l} \frac{1}{\pi} (0+0) \right\} = 0 \cdots \cdots (\text{D.55})
\end{aligned}$$

$i=j$ の場合、式(D.53)の $k=l$ であるから I_{ij} を計算すると、

$$\begin{aligned}
I_{ij} &= \frac{F_i}{2} \int_{-a}^a \left\{ \cos\left(2\frac{k+k-1}{2a}\pi y\right) + \cos\left(2\frac{k-k}{2a}\pi y\right) \right\} dy \cdots \cdots (\text{D.56}) \\
&= \frac{F_i}{2} \int_{-a}^a \left\{ \cos\left(\frac{2k-1}{a}\pi y\right) + \cos 0 \right\} dy \\
&= \frac{F_i}{2} \left(\frac{a}{2k-1} \left[\sin\frac{2k-1}{a}\pi y \right]_{-a}^a + [y]_{-a}^a \right) \\
&= \frac{F_i}{2} \left(\frac{a}{2k-1} \left(\sin\frac{2k-1}{a}\pi a - \sin\frac{2k-1}{a}\pi(-a) \right) + (a - (-a)) \right) \\
&= \frac{F_i}{2} \left(\frac{a}{2k-1} (0+0) + 2a \right) \\
&= F_i a \cdots \cdots (\text{D.57})
\end{aligned}$$

式(D.55)、(D.57)より I_{ij} は $i \neq j$ の場合は消滅し、 $i=j$ の場合は残存し $F_i a$ となる。

参考文献

- 1)小西一郎, 横尾義貫, 成岡昌夫, 丹羽義次: 構造力学 I , 丸善, 1966
- 2)小松定夫: 薄肉構造物の理論と計算 I , 山海堂, 1969
- 3)小松定夫: 構造解析学III,丸善, 1986
- 4)長谷川彰夫, 西野文雄: 新体系土木工学 7 構造物の弾性解析, 技報堂, 1983
- 5)Vlasov V. Z.:Thin Walled Elastic Beams, OTS 61-11400 National Science Foudation, Washinton D.C., 1961., 奥村敏恵, 秋山成興, 鈴木康弘, 落合重俊, 佐伯晃一, 堀川浩甫共訳, ウラソーフ V. Z. : 薄肉弾性ばかりの理論, 技報堂, 1967
- 6)Timoshenko S. and Goodier J. N., Theory of Elasticity, 1st. ed., McGraw-Hill, New York, 1934
- 7)Theodore V. Galambos, Structural Members and Frames, Prentice-Hall, INC.1968. 福本^ト秀士, 西野文雄 共訳: 鋼構造部材と骨組み, 丸善, 1970.
- 8)C. P. Heins, Bending and Torsional Design in Structural Members, Lexington Books; First Edition edition , 1975.
- 9)I.S. Sokolnikoff:Mathematical Theory of Elasticity,McGraw-Hill Book Company, INC., 1956.
- 10)Jan Francu, Petra Novackova, Premysl Janicek: Torsion of a non-circular bar,Engineering MECHANICS, Vol.19, No.1, p45-60, 2012.